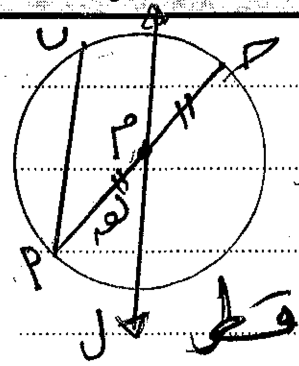
مفاهيم اساسية على الدائرة

الدائرة



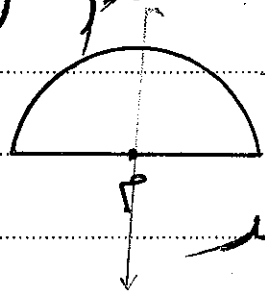
* مَ أ نصف قطر
* أ ب وتر
* أ جـ يسمى قطر

ملاحظة

* القطر هو أطول وتر في الدائرة

محور تماثل الدائرة

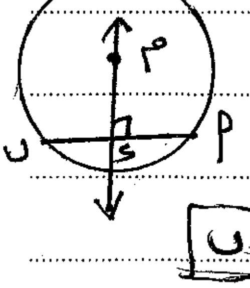
هو المستقيم المار بمركز الدائرة
والدائرة عدد لا نهائي من محاور التماثل



نصف الدائرة
لها محور تماثل واحد

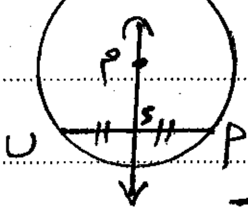
نتائج هامة

1 المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودياً على اى وتر فيها ينصف هذا الوتر



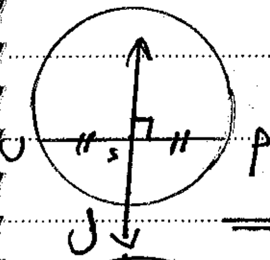
في الشكل
اذا كان $\overline{مَ د} \perp \overline{أ ب}$
فإن $أ د = د ب$

2 المستقيم المار بمركز الدائرة ومنتصف اى وتر فيها يكون عمودياً عليه



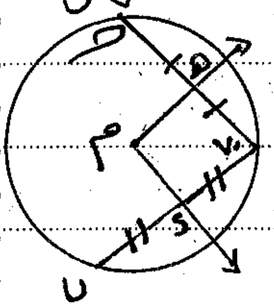
اذا كان
$أ د = د ب$
فإن $\overline{مَ د} \perp \overline{أ ب}$

3 المستقيم العمودي على وتر في دائرة وينصفه يكون ماراً بمركز الدائرة



ل يمر بمركزها مَ

مثال (1) في الشكل



د منتصف $\overline{أ ب}$
هـ منتصف $\overline{أ جـ}$
اوجد ق(∠م)

الحل

∵ $أ د = د ب$ معطى
∴ $\overline{مَ د} \perp \overline{أ ب}$ نتيجة
∴ ق(∠م د أ) = ٩٠°
بالمثل $أ هـ = هـ جـ$ معطى
∴ $\overline{مَ هـ} \perp \overline{أ جـ}$ نتيجة

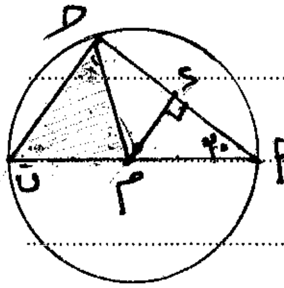
ق(∠ أ هـ م) = ٩٠°

∵ مجموع زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

∴ ق(∠م) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٧٠)

∴ ق(∠م) = ١١٠°

مثال ③ في الشكل



أ ب قطر

م د ⊥ أ جـ

اثبت أن

① م د // ب جـ

② △ م ب جـ متساوي الأضلاع

الحل

∵ م د ⊥ أ جـ معطى

∴ أ د = د جـ ① نتيجة

أ ب قطر

أ م = م ب ← ②

من ① ، ②

∴ م د // ب جـ ← أولاً

ومن الرسم

∴ ق(∠ ب جـ أ) = ق(∠ م د أ) = ٩٠°

بالتناظر

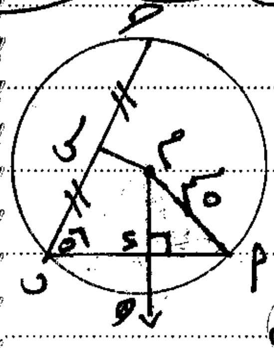
∵ △ أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ٣٠°

∴ ب جـ = ½ الوتر = أ ب

∴ م جـ = م ب = جـ ب = نق

∴ △ م جـ ب متساوي الأضلاع

مثال ② في الشكل



م دائرة نصف قطرها ٥ سم ، أ ب = ٨ سم

أوجد * ق(∠م)

* طول د هـ

الحل

∵ جـ س = س ب معطى

∴ م س ⊥ جـ ب نتيجة

∴ ق(∠ م س ب) = ٩٠°

∵ ق(∠ م د ب) = ٩٠°

∴ ق(∠م)

= ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٥٦)

= ١٢٤° ← أولاً

∵ م د ⊥ أ ب معطى

∴ أ د = د ب

∴ أ د = ٤ سم

من نظرية فيثاغورث في △ أ م د

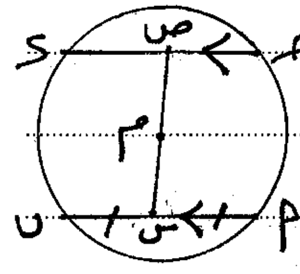
∴ (م د)² = ٢٥ − ١٦

(م د)² = ٩ ← م د = ٣ سم

∵ م هـ = نق = ٥ سم

∴ د هـ = ٥ − ٣ = ٢ سم

مثال ٤



ع الشكل

$\overline{أب} // \overline{جـ د}$

أ س = س ب

اثبت ان ص منتصف جـ د

الحل

∵ أ س = س ب معطى

∴ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$ نتيجة

∴ ق(∠ م س أ) = ٩٠°

~~بالتبادل~~

∵ $\overline{أب} // \overline{جـ د}$ معطى

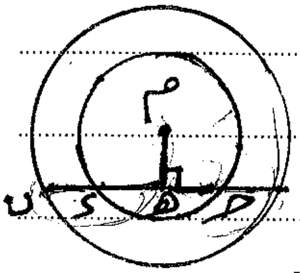
∴ ق(∠ جـ ص س) + ق(∠ أ س ص) = ١٨٠° بالتداخل

∴ ق(∠ جـ ص م) = ٩٠°

∴ $\overline{م ص} \perp \overline{جـ د}$

∴ جـ ص = ص د نتيجة

مثال ٥



ع الشكل

دائرتان متحدتا المركز

$\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ برهان

أ جـ = د ب

الحل

∵ في الدائرة الصغرى

$\overline{م هـ} \perp \overline{جـ د}$ معطى

∴ $\boxed{جـ هـ = هـ د}$ → ① سطر

∵ في الدائرة الكبرى

$\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ معطى

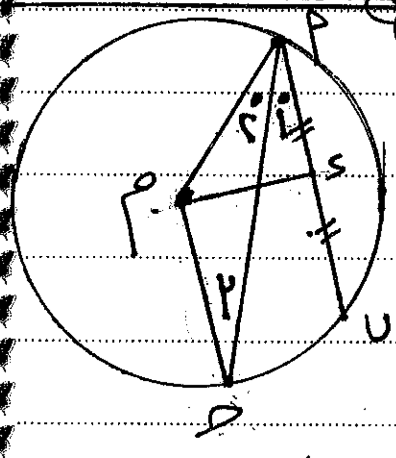
∴ $\boxed{أ هـ = هـ ب}$ → ② سطر

بطرح ① من ②

∴ أ جـ = د ب

هـ . ط . ث

مثال ٦



ع الشكل

أ د = د ب

أ جـ ينصف ∠ ب أ م

برهان ان $\overline{م د} \perp \overline{م جـ}$

الحل

∵ أ د = د ب معطى

∴ $\overline{م د} \perp \overline{أب}$ نتيجة

∴ ق(∠ أ د م) = ٩٠°

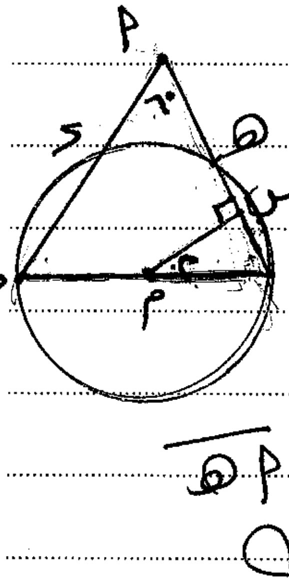
∵ م أ = م جـ = نق

∴ ق(∠٤) = ق(∠٢)

ق(∠٢) = ق(∠١) معطى

∵ ق(١) = ق(٢)
وهما في وضع تبادل
∴ $\overline{أب} // \overline{مجـ}$
∵ ق(∠ءمجـ) = ٩٠°
بالتبادل
∴ $\overline{ءم} \perp \overline{أب}$
هـ.ط.ث

مثال (٧)



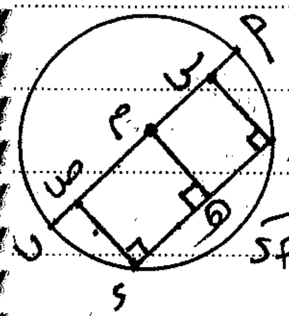
في الشكل أب = أجـ
$\overline{بجـ}$ قطر
$\overline{مس} \perp \overline{بهـ}$
بس = ٢.٥ سم
اوجد طول $\overline{أهـ}$

الحل

∵ $\overline{مس} \perp \overline{بهـ}$ معطى
∴ بس = سهـ سلمة
∴ بهـ = ٥ سم
∵ أب = أجـ معطى
∴ ق(ب) = ق(جـ) = ٦٠°
لأن ق(أ) = ٦٠°
∴ △ أبجـ متساوي الأضلاع
في △ بسم القائم
∵ ق(ب) = ٦٠° ∴ ق(م) = ٣٠°

∴ بس = $\frac{1}{2}$ بم (الوتر)
∴ بم = ٥ سم
∴ بجـ = ١٠ سم
∴ أب = ١٠ سم
∴ أهـ = ٥ سم

مثال (٨) الشرقية ٢٠٠٩



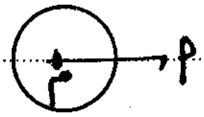
$\overline{أب}$ قطر م
$\overline{سجـ} \perp \overline{جـء}$ ، $\overline{صء} \perp \overline{جـء}$
اثبت ان أس = بص

الحل

العمل نرسم $\overline{مهـ} \perp \overline{جـء}$
∴ جـهـ = هـء ← (١) نتيجة
∵ $\overline{سجـ} \perp \overline{جـء}$ ،
$\overline{صء} \perp \overline{جـء}$
∴ $\overline{سجـ} // \overline{مهـ} // \overline{صء}$
∵ جـهـ = هـء (١)
∴ سم = مص ← (٢)
تطرية ١ع
∵ أم = بم = نق ← (٣)
بطرح (٢) من (٣)
∴ أس = صب
هـ.ط.ث

موضع نقطة بالنسبة لدائرة

١ خارج الدائرة



أم > نق

٢ على الدائرة

أم = نق

٣ داخل الدائرة

أم < نق

مثال ①

إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٠ سم أوجد موضع أ بالنسبة م متى كان

* أم = ١٠ سم
* أم = ٥ سم
* أم = ٣ سم

الحل

نق = ٥

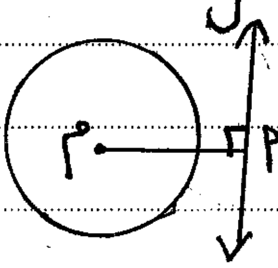
* أ تقع خارج الدائرة
* أ // على //
* أ // // داخل //

سبحان الله وبحمده

سبحان الله العظيم

وضع مستقيم بالنسبة للدائرة

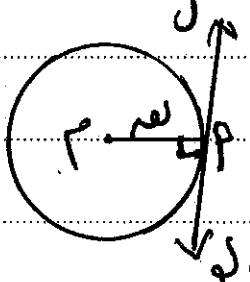
١ خارج الدائرة



أم > نق

ل ∩ م = ∅

٢ مماس للدائرة

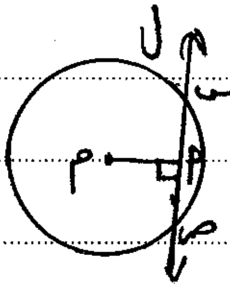


أم = نق

∴ ل مماس

ل ∩ م = {أ}

٣ قاطع للدائرة



أم < نق

ل قاطع للدائرة

ل ∩ م = {س ، ص}

مستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{س ص}}$

* نصف القطر عمودي على المماس من نقطة التماس
* المماسان المرسومان من طرفي قطر في الدائرة متوازيان

مثال ٣

دائرة طول نصف قطرها نق
م أ هو البعد العمودي بين
المستقيم ل والدائرة م
اوجد موضع ل في الحالات الاتيه

(١) م أ = ٢ نق
(٢) م أ = $\frac{٣}{٤}$ نق
(٣) م أ = نق
(٤) م أ = $\frac{٥}{٤}$ نق

الحل

(١) م أ > نق
∴ ل خارج الدائرة

(٢) م أ < نق
ل قاطع للدائرة

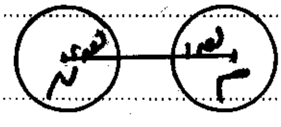
(٣) م أ = نق
∴ ل مماس

(٤) م أ > نق
ل خارج الدائرة

لا حول ولا قوة الا بالله
كنز من كنوز الجنه

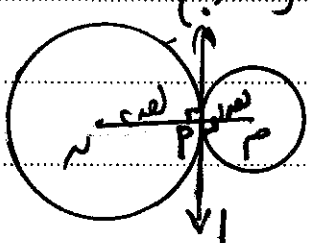
ثالثاً: وضع دائرة بالنسبة لدائرة

(١) متباعدتان



م ن > نق١ + نق٢
م ∩ ن = ∅

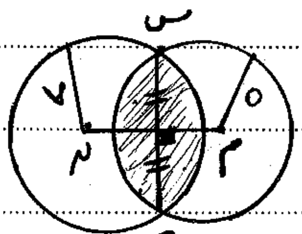
(٢) متماستان من الخارج



م ن = نق١ + نق٢
الدائرة م ∩ ن = {أ}
ل يسمى مماس مشترك

* خط المركزين للدائرتين المتماستين من الخارج يكون عمودياً على المماس المشترك

(٣) متقاطعتان



م ∩ ن = {س، ص}

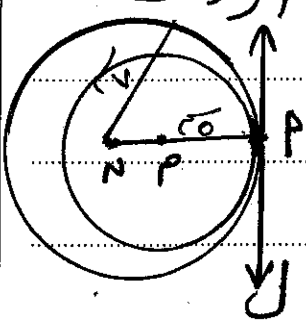
نق١ - نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

م ن ∈]٢ ، ١٢[

ملاحظة

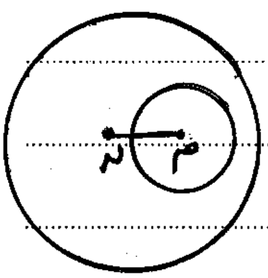
خط المركزين للدائرتين المتقاطعتين عمودي على الوتر المشترك وينصفه

٤) متماستان من الداخل



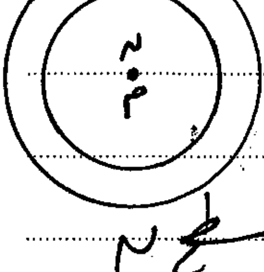
* م ∩ ن = {أ}
* سطح م ∩ سطح ن = سطح م
* $\boxed{م ن = نق_1 - نق_2}$ حيث نق١ > نق٢
* خط المركزين عمودي على المماس المشترك

٥) متداخلتان



* م ∩ ن = φ
* سطح م ∩ سطح ن = سطح م
* م ن < نق١ − نق٢

٦) متحدتا المركز



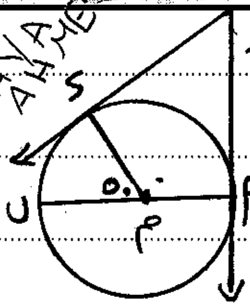
م ∩ ن = φ

م ن = صفر

سطح الدائرة م ∩ سطح ن = سطح م (الصغرى)

من صلى العشاء في جماعة فكأنما قام نصف الليل

مثال ١



في الشكل أ ب قطر، أوجد ق(ج)

الحل

∵ ق(أ م د) = ١٨٠ − ٥٠ = ١٣٠°

∵ أج، جد مماسان

نق ⊥ المماس

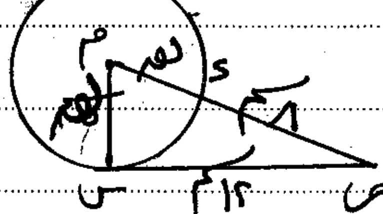
∴ ق(أ) = ق(د) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠

∴ ق(ج) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٣٠)

ق(ج) = ٥٠°

مثال ٢



ص ب مماس، أوجد نق

الحل

م ب ⊥ ب ص (المماس)

∴ ق(ب) = ٩٠° من فيثاغورث

(٨ + نق)² = نق² + (١٢)²

٦٤ + ١٦ نق + $\cancel{نق^2}$ = $\cancel{نق^2}$ + ١٤٤

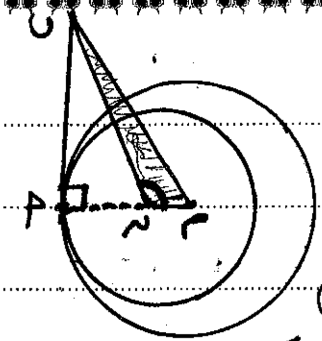
١٦ نق = ١٤٤ − ٦٤

١٦ نق = ٨٠

نق = ٥ سم

ت/ ٠١١ ١٥ ١٥ ٦٢ ٣٢

مثال (٢)



م ، ن دائرتان متماستان من الداخل

نصف قطريهما ١٠ سم ، ٦ سم

أوجد طول $\overline{أب}$ إذا كانت

م (△ ب م ن) = ٢٤ سم²

الحل

∵ م ، ن متماستان من الداخل

م ن = نق₁ − نق₂

م ن = ١٠ − ٦ = ٤ سم

م (△ ب م ن) = ٢٤ سم

$\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أب}$ (المماس).

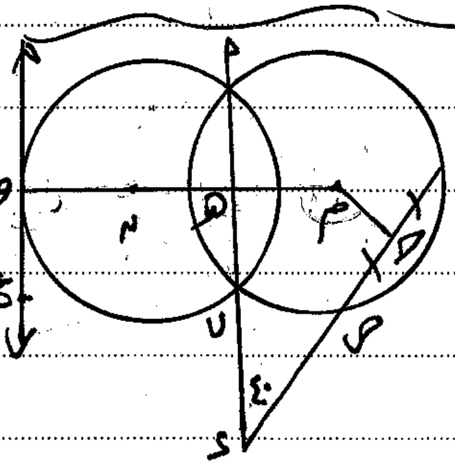
½ م ن × أب = ٢٤

½ × ٤ × أب = ٢٤

٢ أب = ٢٤

أب = ١٢ سم

مثال (٤)



في الشكل

$\overleftrightarrow{صع}$ مماس

ص منتصف $\overline{سهـ}$

أوجد

(١) م(∠ص م هـ)

(٢) اثبت أن $\overleftrightarrow{صع} \parallel \overline{أب}$

الحل

∵ س ص = ص هـ (ص منتصف)

∴ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{س هـ}$ (سابقة)

∴ م(∠م ص هـ) = ٩٠°

∵ $\overline{م ن}$ (خط المركزين)

⊥ $\overline{أب}$ (وتر مشترك)

∴ م(∠م هـ ب) = ٩٠°

∴ م(∠ص م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٤٠°)

= ١٤٠° ← أولاً

∵ $\overline{نق}$ (نق) ⊥ $\overleftrightarrow{صع}$ (مماس) حقيقة

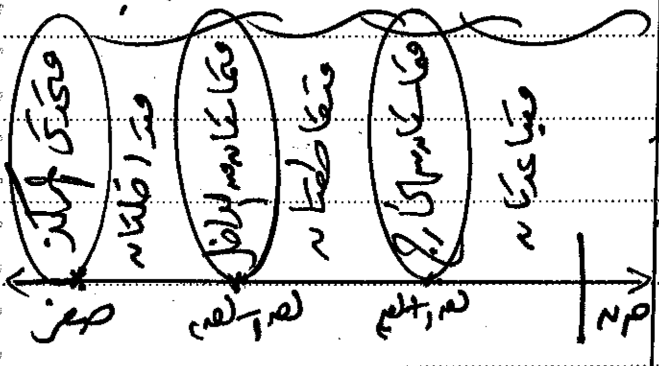
∴ م(∠ن ق ع) = ٩٠°

∵ م(∠ن هـ ب) = ٩٠°

وهما داخليتان ومتكاملتان

∴ $\overline{أب} \parallel \overleftrightarrow{عص}$

ثانياً ←



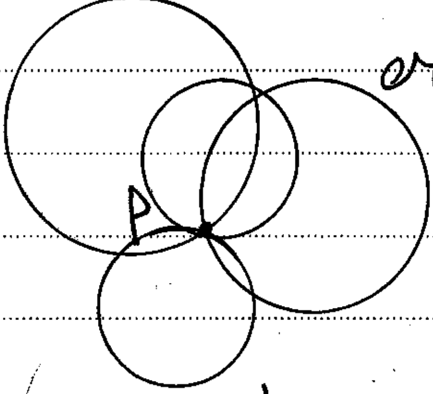
م ، ن دائرتان ١١ ، ٧ سم

(٤) الزهر (١٨) المعبر

تعيين الدائرة

* تعيين الدائرة بمعلومية

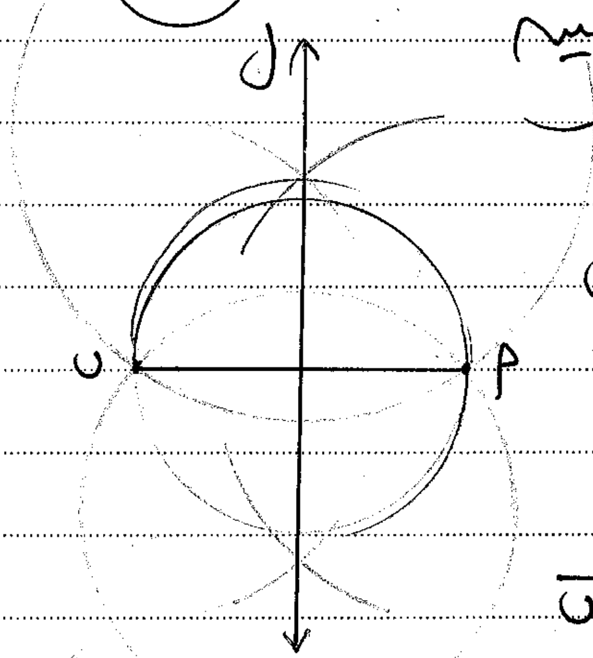
[1] نصف القطر ② مركز الدائرة



أولاً: رسم دائرة تمر بنقطة واحدة

يمكن رسم
عدد لا نهائي من الدوائر تمر بـ أ

ثانياً: رسم دائرة تمر بنقطتين

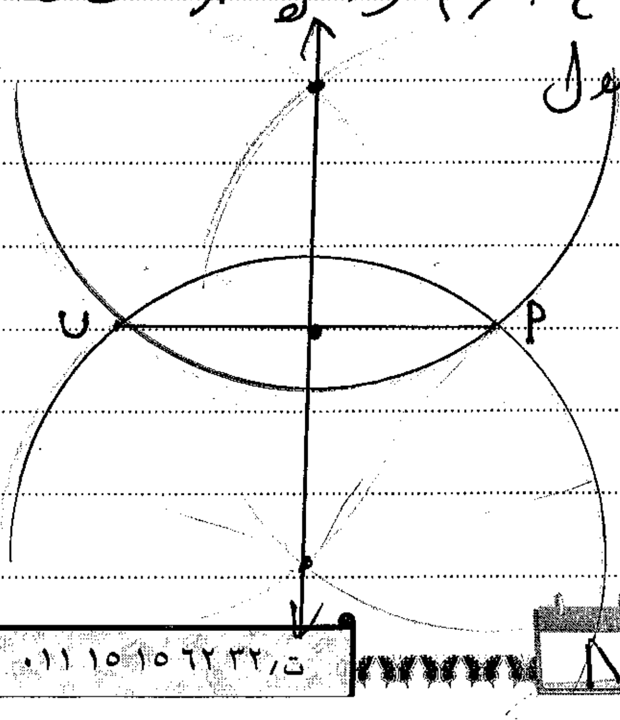


* يمكن رسم عدد لا نهائي من
الدوائر تمر بالنقطتين أ، ب
جميع مراكزها على محور $\overline{أب}$

* أصغر دائرة تمر بالنقطتين
مركزها هو منتصف $\overline{أب}$

مثال (1)

ارسم $\overline{أب}$ طولها ٥ سم ثم ارسم دائرة طول نصف
قطرها ٤ سم . كم عدد الحلول
الممكن



يمكن رسم دائرتين
فقط
عدد الحلول ؟

ملاحظة

في المثال السابق أب طولها ٦ سم أذا كمل

* عدد الدوائر التي يمكن رسمها طول نصف قطرها ٥ سم
دائرة واحدة

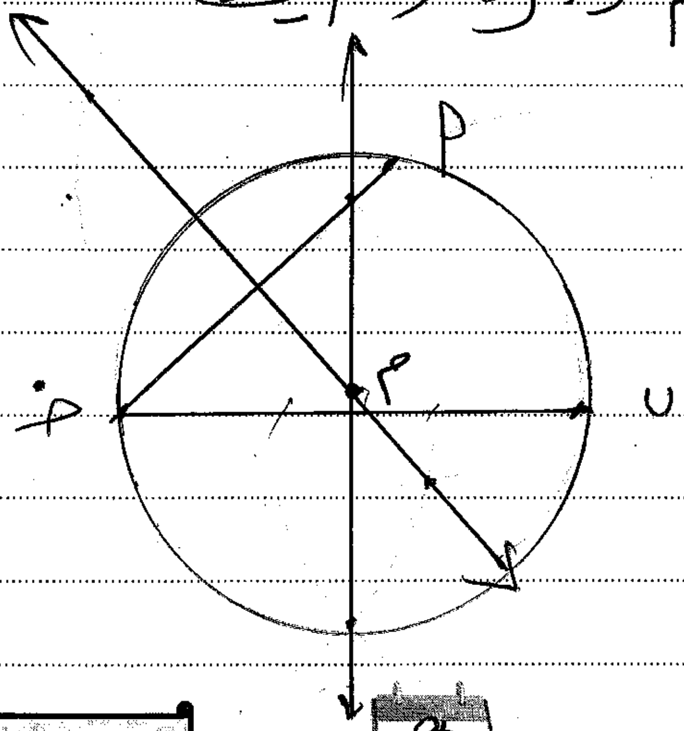
* كم دائرة طول نصف قطرها ٢ سم
لا يوجد

* كم دائرة طول نصف قطرها ٧ سم
٢ دائرتان

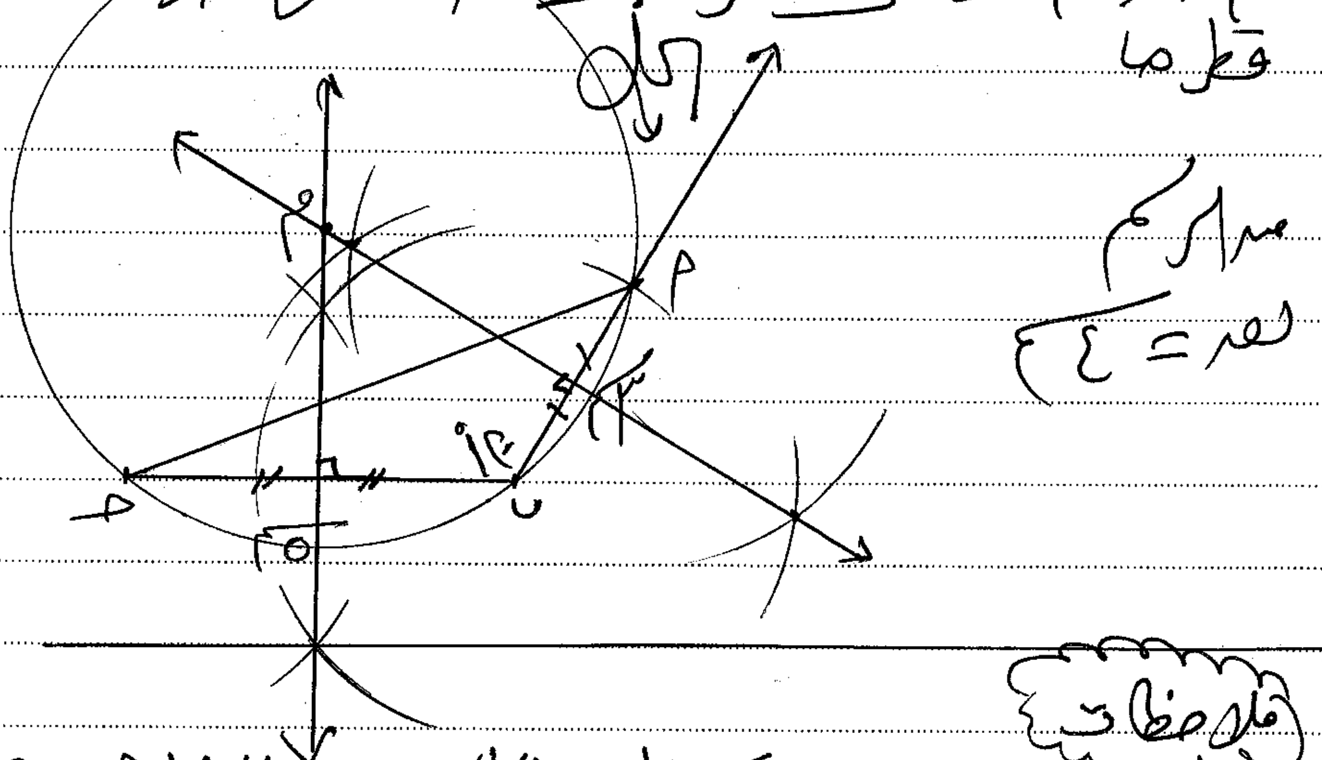
ثالثاً: رسم دائرة تمر بثلاث نقط

[١] اذا كانت النقاط على استقامة واحدة
* لا يمكن رسم أي دائرة

(٢) اذا كانت النقاط ليست على استقامة واحدة
* يمكن رسم دائرة وحيدة



مثال ① ارسم مثلث أ ب حـ المنفرج الزاوية
فيه ق(ب) = ١٢٠° ، أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم
ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه أوجد طول نصف قطرها



نق = ٤ سم

ملاحظات

* مركز الدائرة ~~الداخلة~~ الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه

* مركز الدائرة الخارجة للمثلث الحاد يقع داخل المثلث

* مركز الدائرة ~~الداخلة~~ الخارجة للمثلث المنفرج الزاوية يقع خارج المثلث

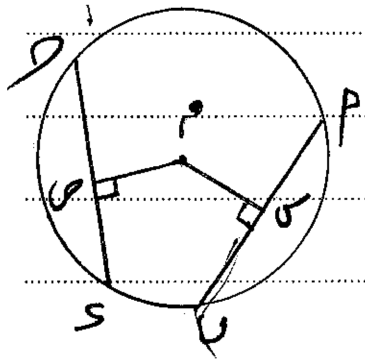
* مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم يقع عند منتصف الوتر

* الدائرة التي تمر برؤوس △ تسمى دائرة خارجة له

الاوتار فى الدائره

نظرية

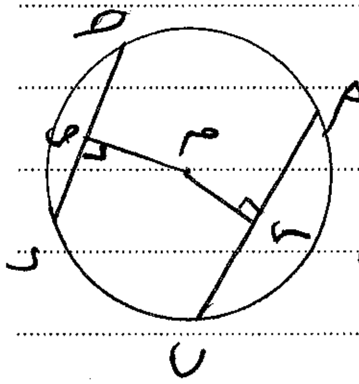
الأوتار المتساوية في الطول من دائرة على أبعاد متساوية من مركزها



أب = جـ د

م س = م ص

ملاحظة

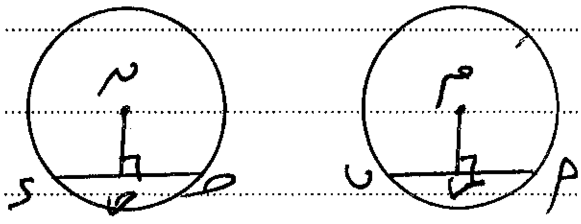


أب > جـ د

م س < م ص

نتيجة

الأوتار المتساوية في الطول في الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من مراكزها

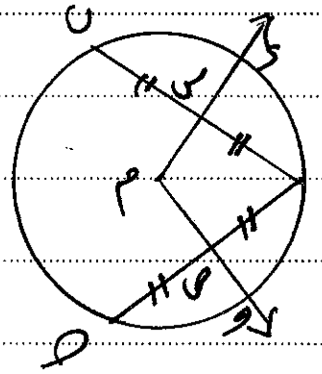


م ≡ ن

أب = جـ د

∴ م س = ن ص

مثال (1)



أجـ = أب

س، ص منتصف أجـ، أب

برهن أن ص و = د س

الحل

∵ أس = س ب ... معطى

∴ م س ⊥ أب ... نتيجة

∴ م س بعد

∵ أص = ص جـ ... معطى

∴ م ص ⊥ أجـ ... نتيجة

∴ م ص بعد

∵ أب = أجـ ... معطى

∴ م س = م ص ... نظرية ← (1)

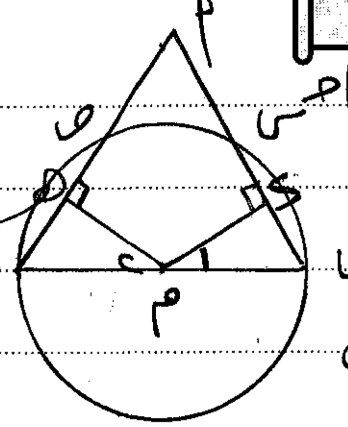
∵ م و = م د = نق ← (2)

بطرح (1) من (2)

∴ د س = و ص

لا تحسبه المجد تمراً أنت آكله
لن تبلغ المجد حتى تلعق الصبرا

مثال ① أ ب = أ جـ ، ب جـ قطر



م ى ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ
برهن ان
ب س = جـ ص

الحل

أ ب = أ جـ ∆ متساوي

∴ ق(ب) = ق(جـ)

∆∆ ب م د ، جـ م هـ
م ب = م جـ
فيهما { ق(ب) = ق(جـ)
ق(١) = ق(٢)

∴ ∆ ≡ ∆ ⟸

م ى = م هـ (الابعاد)

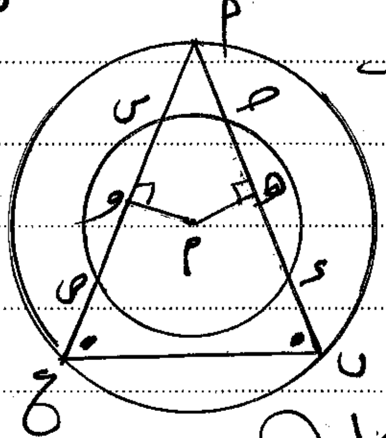
∴ ب س = جـ ص

عكس التراكيب

عكس التطابق

في الدائرة (الدوائر المتطابقة) اذا كانت الاوتار على ابعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول

مثال ②



في الشكل
ق(ب) = ق(ج)
برهن ان
جـ د = س ص

الحل

∵ ق(ب) = ق(ج)

∴ أ ب = أ ج

في الدائرة الكبرى

أ ب = أ ج اوتار

∴ م هـ = م و تراكيب

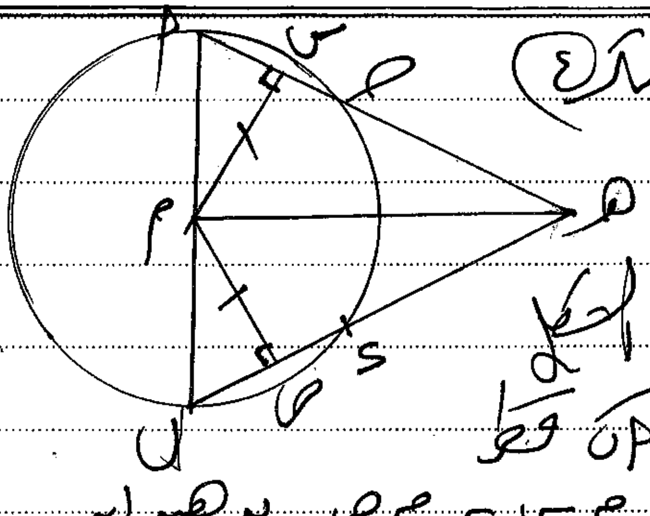
في الدائرة الصغرى

∵ م هـ = م و ابعاد

∴ جـ د = س ص

هـ.ط.ث

مثال ④



في الشكل
ب أ قطر
م س = م ص برهن ان
* ∆ هـ أ ب متساوي الساقين
* هـ ص = هـ د

∵ م س = م ص أبعاد

∴ أ ص = ء ن تطابق ①

∆ ∆ م س أ ، م ص ن

القائمين

فيهما { م أ = م ن ، م ص = م س

∴ ∆ ∆ ≡ ⟸

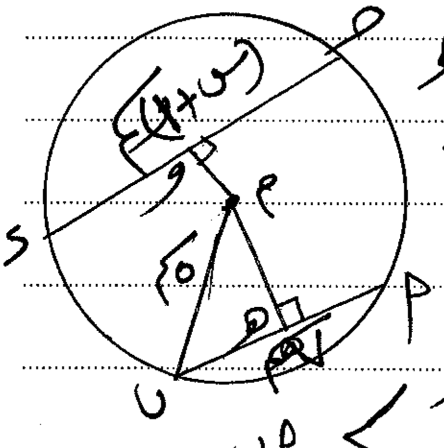
ق(ن) = ق(أ)

∴ هـ ن = هـ أ ⟵ ②

∆ هـ أ ن متساوي الساقين

بطرح ② من ① ⟵ ثانياً

هـ ص = هـ ء



م و > م هـ

س = ؟

الحل

م و < م هـ

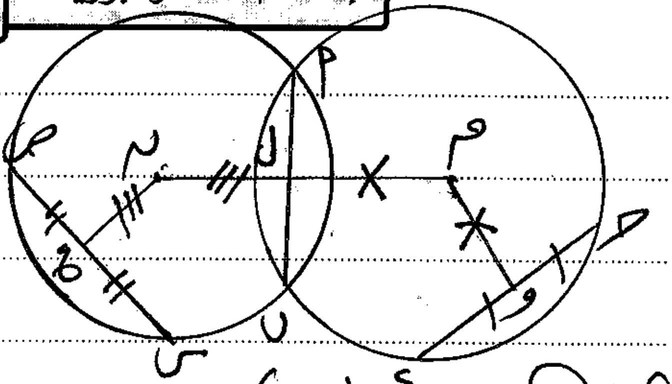
∴ ص ء > أ ن

س + ١ > ٧

∴ ص ء وتر س > ٦

س + ١ ≤ ١٠

س ≤ ٩ ∴ س ∈]٦ ، ٩]



مثال ٤ أ

م و = م ل ، ن ل = ن ع

أثبت أن ص ء = س ص

الحل

∵ ص و = و ء منتصف

∴ م و ⊥ ص ء

∴ م و بعد

بالمثل س ع = ع ص منتصف

ن ع ⊥ س ص

∴ ن ع بعد

∵ م ن (خط المركزين) ⊥ أ ن (وتر مشترك)

∴ م ل ، ن ل أبعاد

في الدائرة م

∵ م و = م ل أبعاد

∴ $\boxed{\text{ص ء = أ ن}}$ ① لماذا

في الدائرة ن

ن ل = ن ع أبعاد

∴ $\boxed{\text{س ص = أ ن}}$ ② أوتار

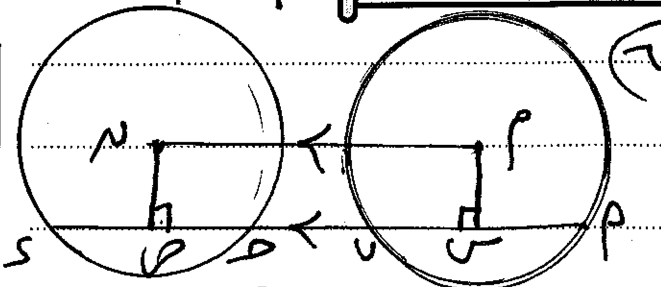
من ① ، ②

∴ ص ء = س ص

إعداد أ/ناصر ابوزيد

م ≡ ن

٦)



ع) المعطى أص // م ن

اثبت أن

أص = ب د

الحل

∵ م س ⊥ أب

ن ص ⊥ حـ د

∴ م س // ن ص

∵ م ن // س ص

∴ الشكل متوازي أضلاع

∵ ق(∠س) = ٩٠°

∴ الشكل م س ص ن مستطيل

∴ م س = ن ص أنصاف

∴ م ≡ ن

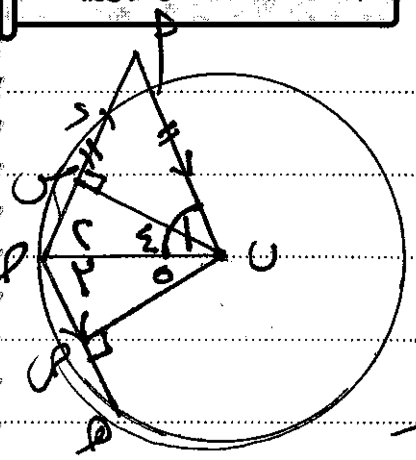
∴ $\boxed{\text{أب = حـ د}}$ سطر

بإضافة ب حـ إلى الطرفين

∴ أحـ = ب د

هـ . ا . ط

مثال ٧



أب = أحـ

حـهـ // أب

اثبت

ص هـ = ص د

الحل

مثلث أب = أحـ

∴ ق(١) = ق(٢)

∵ أب // حـهـ مثلث

∴ ق(١) = ق(٤)

∴ $\boxed{\text{ق(٢) = ق(٣)}}$

∵ ن ص ⊥ هـ حـ

ن س ⊥ د حـ

∴ ق(ص) = ق(س) = ٩٠°

∆∆ ن ص حـ ، ن س حـ

فيهما ن حـ ضلع مشترك

ق(٢) = ق(٣)

ق(٤) = ق(٥)

∴ ∆∆ ≡

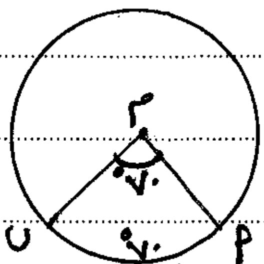
ن ص = ن س

∴ هـ حـ = حـ د

هـ . ا . ط

الزاوية المركزية والقوس

إعداد م/ ناصر ابوزيد



م مركز

زاوية مركزية

★ $\overset{\frown}{أب}$

★ قياس القوس يساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له

★ طول القوس هو جزء من طول الدائرة

ملاحظة

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi\,نق} = \frac{\text{قياس القوس}}{360^\circ}$$

★ قياس نصف الدائرة = 180°

★ قياس ربع الدائرة = 90°

★ قياس $\frac{3}{5}$ الدائرة =

$\frac{3}{5} \times 360 = 216^\circ$

★ طول نصف الدائرة = π نق

★ طول ربع الدائرة = $\frac{1}{2}\pi$ نق

مثال (1)

اوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{2}{5}$ دائرة واذا كان طول نصف قطرها ٣٥ سم اوجد طوله

الحل

قياس القوس = $\frac{2}{5} \times 360 = 144^\circ$

طول القوس = $\frac{2}{5} \times 2\pi$ نق

$= \frac{2}{5} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 35$

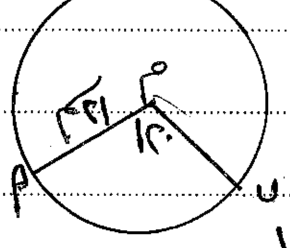
$= 88$ سم

مثال (2)

دائرة م طول نصف قطرها ٢١ سم

أ، ب $\in$ للدائرة ، ق($\angle$أمب) $= 120^\circ$ اوجد طول $\overset{\frown}{أب}$

الحل



ق($\overset{\frown}{أب}$) $= 120^\circ$

طول القوس = $\frac{120}{360} \times 2\pi$ نق

$= \cancel{\frac{1}{3}} \times 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{21}$

$= 44$ سم

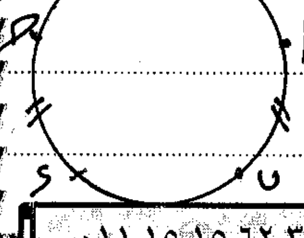
نتائج هامة

1 في الدائرة الواحدة (المتطابقة) الأقواس متساوية في القياس متساوية في الطول والعكس صحيح

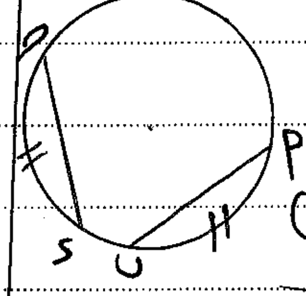
ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{جـد}$)

فإنه

طول $\overset{\frown}{أب}$ = طول $\overset{\frown}{جـد}$



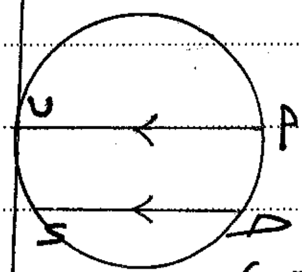
(٢) في الدائرة الواحدة (المتطابقة) إذا كانت الأقواس متساوية في القياس أوتارها متساوية في الطول والعكس صحيح



أب = جـ د

ق(أب⌒) = ق(جـ د⌒)

(٣) الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس

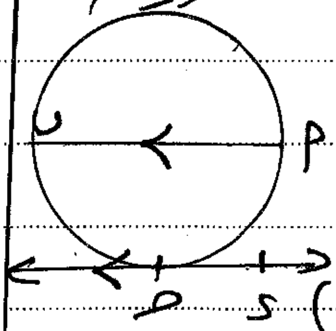


أب // جـ د

فإن

ق(أجـ⌒) = ق(ب د⌒)

(٤) القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه في الدائرة متساويان في القياس



أب // جـ د

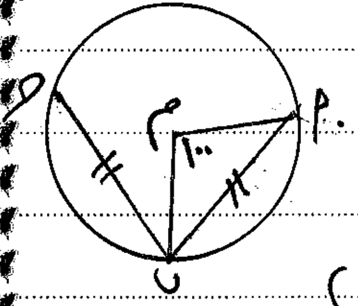
جـ د (مماس)

فإن

ق(أجـ⌒) = ق(ب جـ⌒)

مثال (١)

في الشكل



أب = ب جـ

أوجد ق(ب جـ⌒)

الحل

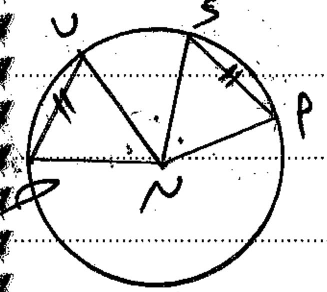
∵ أب = ب جـ معطى

∴ ق(أب⌒) = ق(ب جـ⌒) يكمل

∵ ق(أب⌒) = ق(∠م) = ١٠٠°

∴ ق(ب جـ⌒) = ١٠٠°

مثال (٢)



أد = ب جـ

برهن أن

ق(∠أمب) = ق(∠دمجـ)

الحل

أد = ب جـ معطى

∴ ق(أد⌒) = ق(ب جـ⌒)

بإضافة ق(د ب⌒)

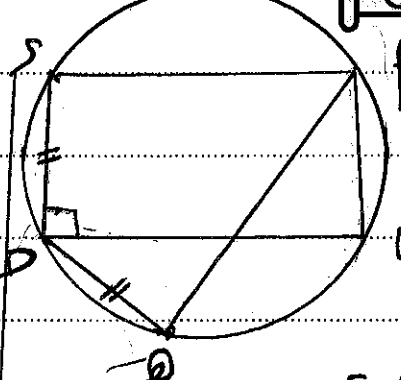
∴ ق(أدب⌒) = ق(دبجـ⌒)

∴ ق(∠أمب) = ق(∠دمجـ)

هـ.ط

سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

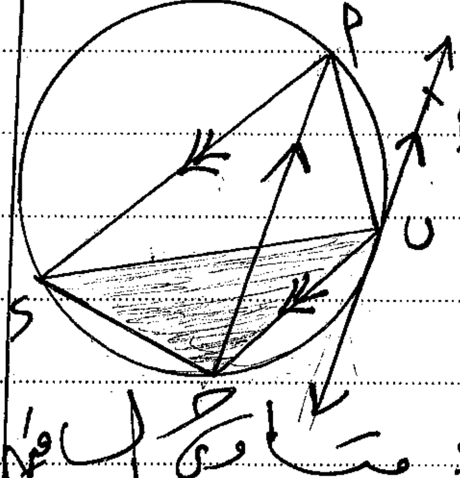
[٣] في الشكل
أ ب جـ د مستطيل
هـ جـ = جـ د
برهن أن أ هـ = ب جـ



الحل

∵ أ ب = د جـ
(من الشكل مستطيل)
∵ د جـ = هـ جـ معطى
∴ $\boxed{\text{أ ب = هـ جـ}}$
∴ ق(أب) = ق(هـجـ)
بإضافة ق(ب هـ) إلى الطرفين
∴ ق(أب هـ) = ق(ب هـ جـ)
∴ أ هـ = ب جـ وهو المطلوب

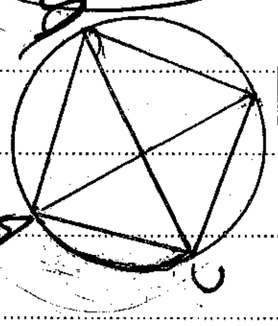
[٤] ب هـ مماس
ب هـ // أ جـ
ب جـ // أ د
برهن أن
△ ب جـ د متساوي الساقين



الحل

∵ ب هـ (مماس) // أ جـ معطى
∴ ق(أب) = ق(ب جـ) نتيجة ①
∵ ب جـ // أ د معطى
∴ ق(أب) = ق(جـ د) نتيجة ②
من ①، ②
∴ ق(ب جـ) = ق(جـ د)
∴ ب جـ = جـ د وهو المطلوب
∴ △ ب جـ د متساوي الساقين

[٥] في الشكل
أ جـ = ب د
برهن أن
أ ب = جـ د

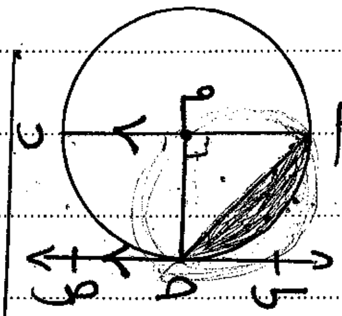


الحل

∵ أ جـ = ب د
∴ ق(أب جـ) = ق(ب جـ د)
بحذف ق(ب جـ) من الطرفين
∴ ق(أب) = ق(جـ د)
∴ أ ب = جـ د

إعداد م/ ناصر أبوزيد

(٧) في الشكل



نق = ٧ سم

$\overline{أب}$ قطر

$\overleftrightarrow{س ص} \parallel \overline{أب}$

أوجد

(١) ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) (٢) طول $\overset{\frown}{أ جـ}$

(٣) مساحة المنطقة المظللة

الحل

∵ $\overline{أب} \parallel \overleftrightarrow{س ص}$ (مماس)

∴ ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق($\overset{\frown}{جـ ب}$) مباشرة

، ∵ $\overline{أب}$ قطر

∴ ق($\overset{\frown}{أ جـ ب}$) = ١٨٠

∴ ق($\overset{\frown}{جـ ب}$) = ٩٠° ← (١)

ق($\overset{\frown}{جـ أ}$) = ٩٠°

طول القوس = $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق

= $\frac{١}{٤}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧

= ١١ سم ← (٢)

م الجزء المظلل = م $\frac{١}{٤}$ الدائرة − م △ م أ جـ

= $\frac{١}{٤}$ × ط نق² − $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٧

= $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ − $\frac{١}{٢}$ × ٤٩

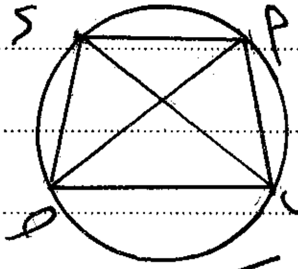
= $\frac{١}{٢}$ (٧٧ − ٤٩)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٨ = ١٤ سم²

ملاحظة

محيط الجزء المظلل = طول $\overset{\frown}{أ جـ}$ + أ جـ

(٨) في الشكل



أ جـ = ب د

أب = (٣س − ٥) سم

، دجـ = (س + ٢) سم

أوجد طول $\overline{أب}$

الحل

∵ أ جـ = ب د

∴ ق($\overset{\frown}{أ ب جـ}$) = ق($\overset{\frown}{ب جـ د}$)

بطرح ق($\overset{\frown}{ب جـ}$)

ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{د جـ}$)

أب = د جـ

∴ ٣س − ٥ = س + ٢

٣س − س = ٥ + ٢

٢س = ٨

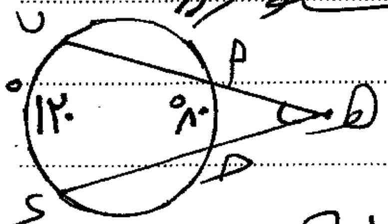
س = ٤

∴ أب = ١٢ − ٥

أب = ٧ سم

إعداد م/ ناصر أبوزيد

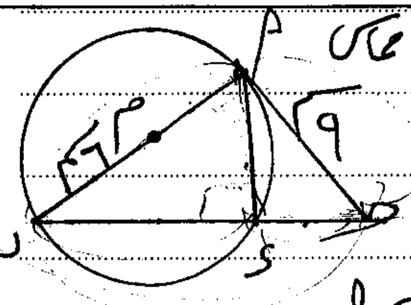
تمرين ص ٩١ / ١١



$ق(هـ) = \frac{1}{2} ق[ب د - أ جـ]$

$= \frac{1}{2}[١٢٠ - ٨٠] = ٢٥°$

مثال ٢ أ هـ مماس



هـ أ = ٩ ، م أ = ٦ سم

أوجد

ب هـ ، أ د

الحل

∵ م أ ⊥ أ هـ (مماس)

∴ ق(هـ أ̂ ب) = ٩٠°

∵ أ ب قطر

∴ ق(أ د̂ ب) = ٩٠°

∴ أ ب = ١٢ سم

من فيثاغورث

$(هـ ب)^2 = (٩)^2 + (١٢)^2$

$(هـ ب)^2 = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥$

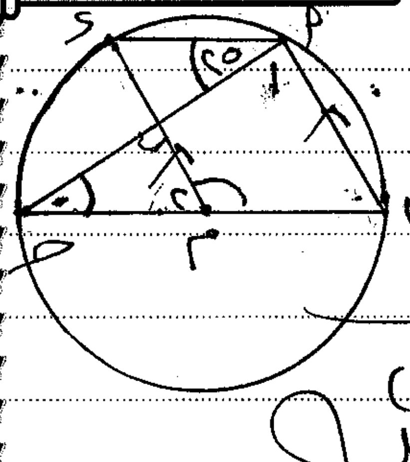
هـ ب = ١٥ سم

من اقليدس

$أ د = \frac{أ هـ \times أ ب}{هـ ب}$

$= \frac{١٢ \times ٩}{١٥} = ٧,٢$ سم

مثال ٣



ب جـ قطر

أ ب // جـ د

أوجد

ق(أ م̂ ب)

الحل

∵ ب جـ قطر

∴ ق(أ) = ٩٠° بمحيطية

ق(د أ̂ جـ) المحيطية = ½ ق(٢) المركزية

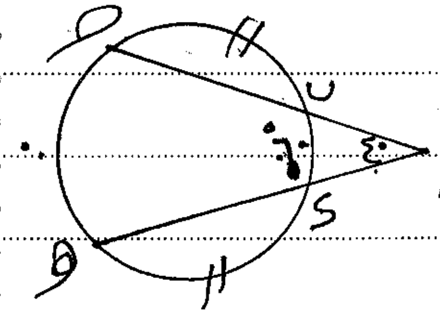
∴ ق(٢) = ٥٠°

∵ أ ب // جـ د

ق(ب) = ٥٠° بالتبادل

ق(جـ) = ٩٠ − ٥٠ = ٤٠°

مثال ٤



خ الحل

ب جـ = د هـ

أوجد

١) ق(هـ جـ) ٢) ق(ب جـ)

الحل

$٤٠° = \frac{1}{2} ق[هـ جـ - ٦٠°]$

$٨٠ = ق(هـ جـ) - ٦٠°$

$ق(هـ جـ) = ١٤٠°$

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢

إعداد أ/ ناصر ابوزيد

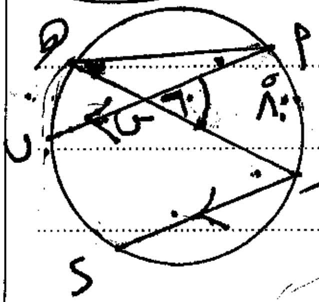
ق(ب حـ) + ق(د هـ)

= ٣٦٠ − (٦٠ + ١٢٠)

= ١٦٠°

∴ ق(ب حـ) = ١٦٠/٢ = ٨٠°

مثال ⑤



أب // حـ د

أوجد

① ق(∠أ هـ حـ)

② ق(ب د) ③ ق(ب هـ)

الحل

أب // حـ د

∴ ق(ب د) = ق(أ حـ) = ٨٠°

ق(∠هـ) المحيطية = ½ ق(أ حـ)

∴ ق(∠هـ) = ٤٠°

∵ ق(∠حـ) = ٦٠° بالتبادل

ق(د ب هـ) = ١٢٠°

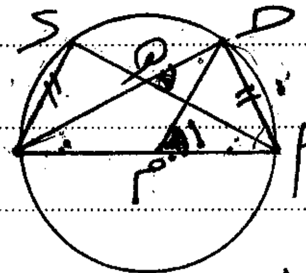
ق(هـ ب) = ١٢٠ − ٨٠

= ٤٠°

ملاحظة عليك استخدام المرسومة المشهور للوصول لايجاد ب هـ

مثال ⑥

في الشكل



أحـ = ب د

اثبت أن

ق(∠أ م حـ) = ق(∠أ هـ حـ)

الحل

∵ أحـ = ب د

∴ ق(أ حـ) = ق(ب د) ــــ ①

∵ أب قطر

∴ ق(∠م) = ق(أ حـ) ــــ ②

من المرسومة المشهور

ق(∠هـ) = ½ ق[أ حـ + ب د]

ق(∠هـ) = ½ × ٢ ق(أ حـ)

ق(∠هـ) = ق(أ حـ)

② ــــ من ٢/٣

ق(∠هـ) = ق(∠م)

من جمال اللغة العربية

قيل " من أسعد الناس ؟؟

قال من أسعد الناس "

مثال (٧)

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فإذا كانت

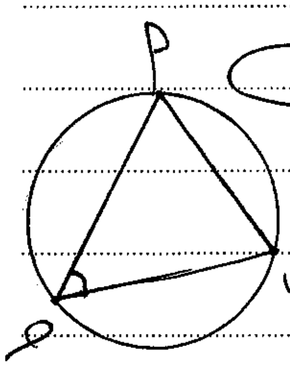
ق($\overset{\frown}{أب}$) : ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) : ق($\overset{\frown}{جـ أ}$)

= ٥ : ٦ : ٧

فأوجد قياس كل من زوايا

Δ أ ب جـ

الحل



نفرض أن

ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٥س

ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ٦س

ق($\overset{\frown}{جـ أ}$) = ٧س

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ٥س + ٦س + ٧س = ٣٦٠°

١٨ س = ٣٦٠°

$\boxed{\text{س = ٢٠}}$

ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١٠٠°

ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ١٢٠°

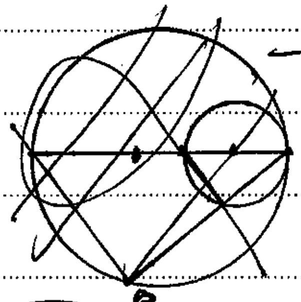
ق($\overset{\frown}{جـ أ}$) = ١٤٠°

∴ ق(∠جـ) = ٥٠°

ق(∠ب) = ٧٠°

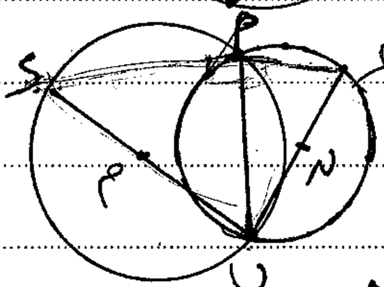
ق(∠أ) = ٦٠°

مثال (٨)



جـ ب قطر

ب د قطر أ



برهن أن

جـ ، أ ، د

على استقامة واحدة

الحل

∵ جـ ب قطر في ن

∴ ق(∠جـ أ ب) = ٩٠°

محيطية في نصف دائرة

بالمثل ب د قطر

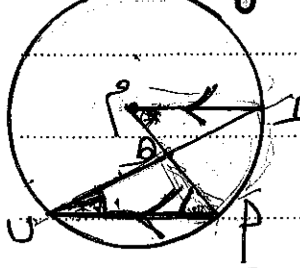
∴ ق(∠ب أ د) = ٩٠°

∴ ق(∠جـ أ د)

= ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

∴ جـ ، أ ، د على استقامة واحدة

إعداد أ/ ناصر أبوزيد



فكرة (٧)

ح م // ب أ

إثبات إن

ب هـ > أ هـ

الحل

ح م // ب أ

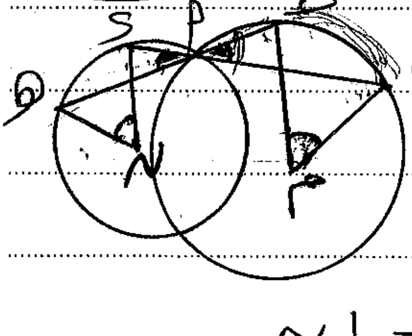
ق(∠م) = ق(∠أ) بالتبادل

∵ ق(∠ب) المحيطية = ½ ق(∠م) المركزية

من (١)

∴ ق(∠أ) > ق(∠ب)

هـ ب > أ هـ



مثال (١)

ع/ ...

المطلوب إثبات

ق(∠هـ م ب) = ق(∠د هـ)

الحل

∵ ق(∠ب أ هـ) = ق(∠د هـ)

من (١) بالتقابل

∵ ق(∠ب أ هـ) = ½ ق(∠م)

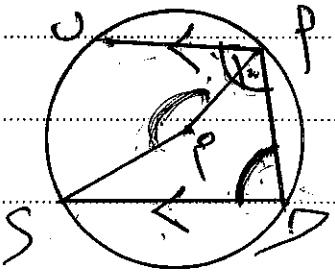
من (٢) تطرح

ق(∠د هـ) = ½ ق(∠م)

من (٣)

من (١)، (٢)، (٣)

ق(∠م) = ق(∠ب)



ب أ // هـ د

ق(∠أ) = ١٠٠°

أوجد ق(∠أ م د)

الحل

ب أ // هـ د

ق(∠هـ) = ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠°

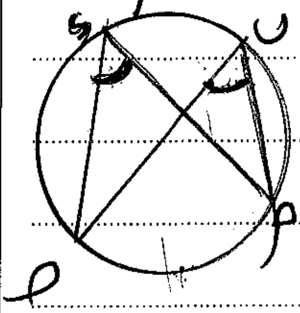
∵ ق(∠هـ) = ½ ق(∠م) المركزية

∴ ق(∠م) = ١٦٠°

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢

نظرية ٢

الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس متساوية في القياس

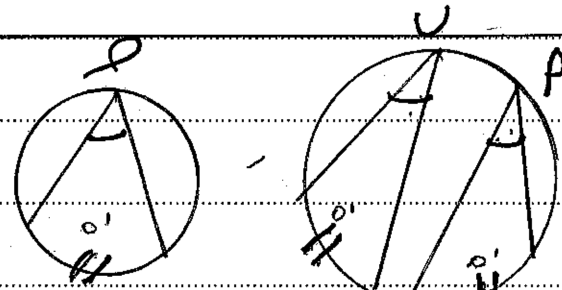


ق(∠ب) = ق(∠د)

لأنهما تحصران $\frown$أجـ

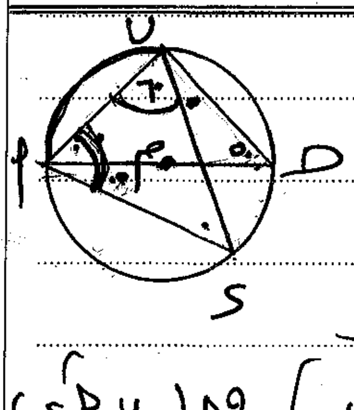
نتيجة

الزوايا المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية (في الدائرة الواحدة أو عدة دوائر) تكون متساوية في القياس



ق(∠أ) = ق(∠ب) = ق(∠جـ)

مثال ١



ح/ الشكل

أجـ قطر

أوجد

ق(∠جـ ب د) ، ق(∠أ ب د)

الحل

ق(∠ب) = ق(∠د) = ٥٠°

لأنهما تحصران $\frown$أب

∴ ق(∠أ ب د)

= ١٨٠ − (٥٠ + ٦٠)

= ٧٠°

أجـ قطر

ق(∠جـ ب أ) = ٩٠°

ق(∠جـ ب د) = ٣٠°

مثال ٢

أوجد

ق(∠أ هـ د)

الحل

∵ أب قطر

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠١) = ٩٠ − ٥٥ = ٣٥°

∵ د جـ // أب

ق(∠٢) = ق(∠١) = ٣٥°

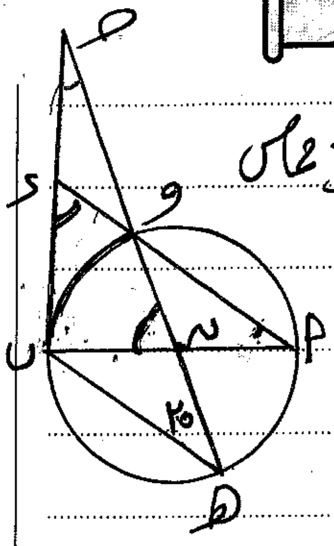
بالتبادل

∴ ق(∠أ هـ د) = ق(∠٢)

= ٣٥ تحصران

لأنهما تحصران أد

مثال (٣)
في الشكل، بد مماس

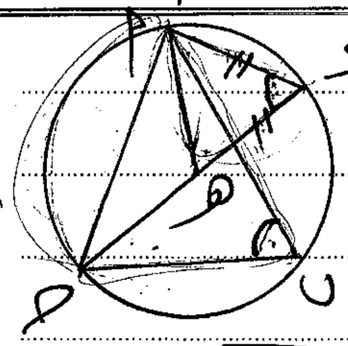


أوجد
① ق(∠ ب م ص)
② ق(∠ ب و م)
③ ق(∠ ب ء ج)

الحل

∵ ق(∠أ) = ق(∠هـ) = ٣٥°
نظرية محيطيتان يحصران ون
∵ ق(∠ و م ب) المركزية = ٧٠° ضعف المحيطية
ق(∠ م ب ء) = ٩٠° حيث م ب ⊥ ب ء (مماس)
ق(∠و) = ٩٠° − ٧٠° = ٢٠°
ق(∠ أ ء ب) = ٩٠° − ٣٥ = ٥٥

مثال (٤)



أ ء = ء هـ
، △ أ ب ج متساوي الأضلاع
أثبت أن △ أ ء هـ متساوي الأضلاع

الحل

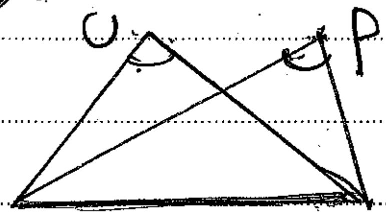
∵ △ أ ب ج متساوي الأضلاع
∴ ق(∠ب) = ٦٠°
∴ ق(∠ء) = ق(∠ب) = ٦٠
نظرية يحصران أج
∵ أ ء = ء هـ معطى
∴ △ أ ء هـ متساوي الساقين
وبه ٦٠° ∴ يصبح
متساوي الأضلاع

الشكل الرباعي الدائري

هو شكل رباعي تمر برؤوسه الأربعة دائرة واحدة

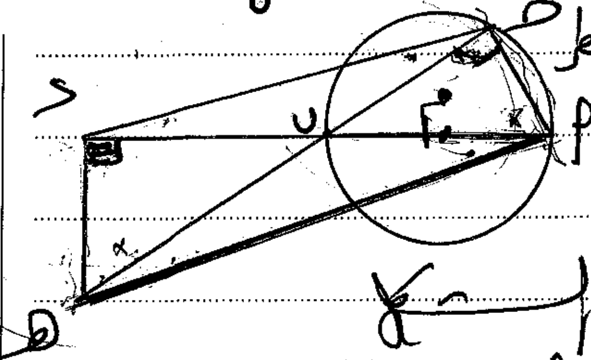
* عكس النظرية

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها فإنه تمر برؤوسها الأربعة دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتر فيها



إذا كان
ق(∠أ) = ق(∠ب)
∴ يمكن رسم دائرة تمر بالرؤوس أ، ب، ج، ء

أب قطر



ع/ الشكل

اثبت أن

أ هـ د هـ شكل رباعي دائري

الحل

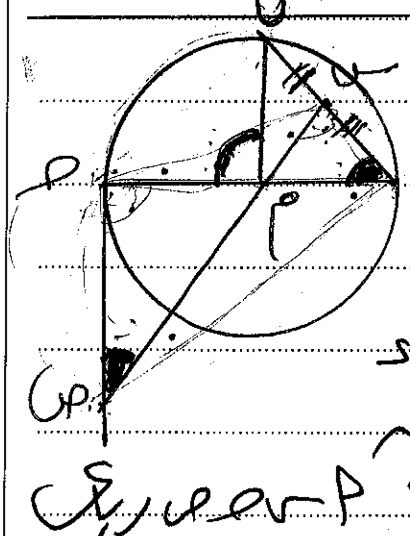
∵ أب قطر

∴ ق(∠أهـب) = ٩٠°

∴ ق(∠أهـ هـ) = ق(∠أ د هـ) = ٩٠° وهما مرسومتان على أهـ

∴ الشكل أهـ د هـ رباعي دائري

مثال



أص قطر

هـ ص مماس

أ س = س ب

بد هـ أن

① الشكل أ م س ص رباعي دائري

② ق(∠ب م ص) = ٢ ق(∠م أ ص)

الحل

∵ أم (قطر) ⊥ هـ ص مماس

∴ ق(∠ص) = ٩٠°

∵ أس = س ب

∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠أ س م) = ٩٠°

∴ ق(∠س) = ق(∠ص) = ٩٠°

وهما مرسومتان على أص

∴ الشكل أ م س ص رباعي دائري

← أولاً

ثانياً

∵ ق(∠ص) = ق(∠م) → ①

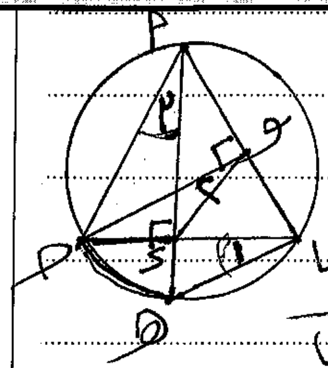
لأنهما مرسومتان على س ص

∵ ق(∠م) المركزية = $\frac{1}{2}$ ق(∠م) الملتقية → ②

من ① ②

∴ ق(∠ب م ص) = ٢ ق(∠م أ ص)

هـ.ط.ث



مثال (١)

شكل (١)

أد ⊥ ب جـ ، جـ و ⊥ أ ب

يبرهن أن

① الشكل أ و د جـ رباعي دائري

② ق(∠هـ ب جـ) = ق(∠د و جـ)

الحل

∵ ق(∠أ و جـ) = ق(∠أ د جـ) = ٩٠° معطى

وهما مرسومتان على أجـ

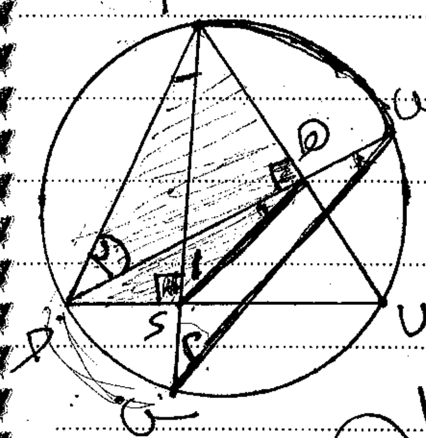
∴ الشكل أ و د جـ رباعي دائري ← ①

∵ الشكل رباعي دائري

ق(٢) = ق(٣) ← I

∴ ق(١) = ق(٣) محيطيتان مشتركتان في هـ جـ ← II

من I ، II ∴ ق(١) = ق(٢)



مثال (٢)

شكل (١)

إثبات أن

س ص // د هـ

الحل

∵ ق(∠أ هـ ب) = ق(∠أ د ب) = ٩٠° معطى

وهما مرسومتان على أب

∴ الشكل أ هـ د ب رباعي دائري

ومنه

∴ ق(١) = ق(٣) ← I

∵ ق(٢) = ق(٣) محيطيتان مشتركتان في أ ص ← II

من I ، II

∴ ق(١) = ق(٢)

وهما في وضع تناظر

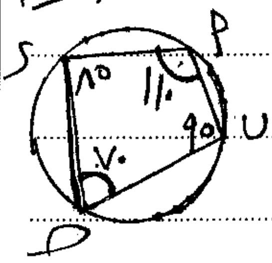
∴ س ص // د هـ

هـ . ط . ث

خواص الرباعي الدائري

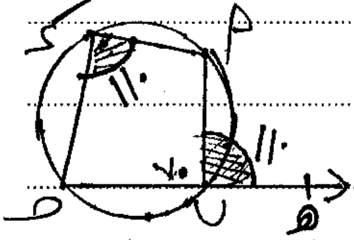
نظرية

إذا كان الشكل رباعي دائري
فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتين

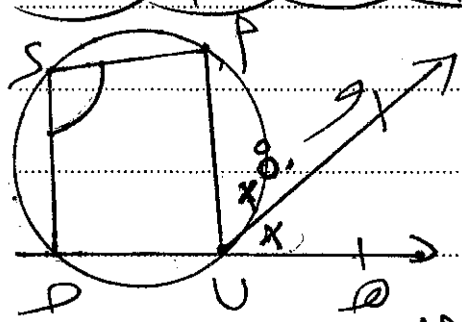


نتيجة

قياس الزاوية الخارجة عند
أي رأس من رؤوس
الشكل الرباعي الدائري
= قياس الزاوية الداخلة
المقابلة للمجاورة



ق(∠أ ب هـ)
= ق(∠د)

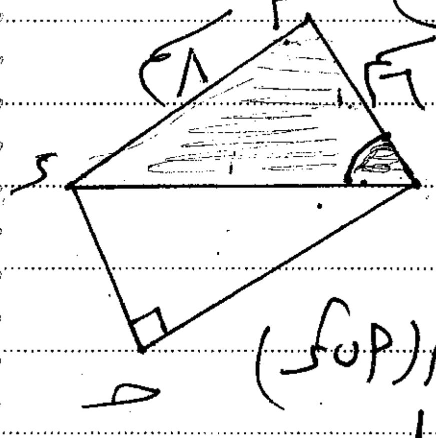


مثال
أوجد
ق(∠د)

الحل

∵ ق(∠و ب أ) = ٥٠°
∴ ق(∠هـ ب أ) = ١٠٠°
∴ ق(∠د) = ١٠٠°

مثال ① أ ب جـ د شكل رباعي دائري



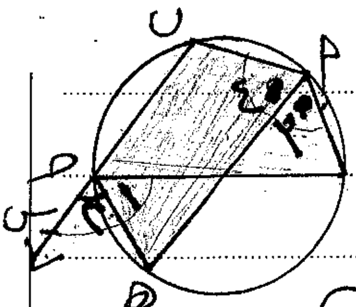
أوجد
مساحة △ أ ب د
ثم أوجد ق(∠أ ب د)

الحل

∵ الشكل أ ب جـ د
رباعي دائري
∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°
قطر
ق(∠أ) = ٩٠°
م △ أ ب د
= ½ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم²
لماذا ←
∴ ظا ب = ٨/٦
∴ ق(∠د ب أ) = shift tan ٨/٦
= ٥٣° ٧َ

سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

مثال (٥)



في الشكل

أ هـ ينصف ∠ د أ ن

ء ح ∩ ن هـ = {س}

ح هـ ينصف ∠ س ح ء

الحل

∵ ق(∠٣) = ق(∠١)

محيطيتان تحصران د هـ

∵ ق(∠٢) = ق(∠٤) معطى

∴ ق(∠٤) = ق(∠١) ← I

∵ ق(∠٢) = ق(∠٤) نتيجة ← II

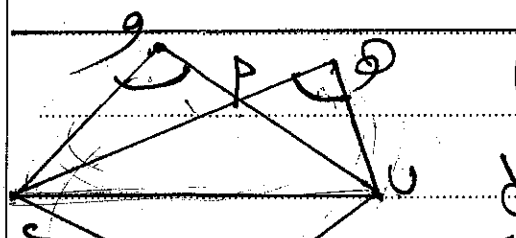
مرسومة خارجة من الشكل أ هـ ح ن

من I ، II

∴ ق(∠١) = ق(∠٥)

∴ ح هـ ينصف ∠ د ح س

مثال (٦)



في الشكل

هـ ن ح ء ، و ن ح ء

رباعي دائري

أثبت أن الشكل

هـ ن ء و رباعي دائري

الحل

∵ الشكل هـ ن ح ء

رباعي دائري

∴ ق(∠هـ) تكمل ق(∠ح)

← (١)

الشكل و ن ح ء

رباعي دائري

∴ ق(∠و) تكمل ق(∠ح)

← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق(∠هـ) = ق(∠و)

وهما مرسومتان على ن ء

∴ الشكل هـ ن ء و

رباعي دائري

عكس النظرية

إذا وجدت زاويتان متقابلتان

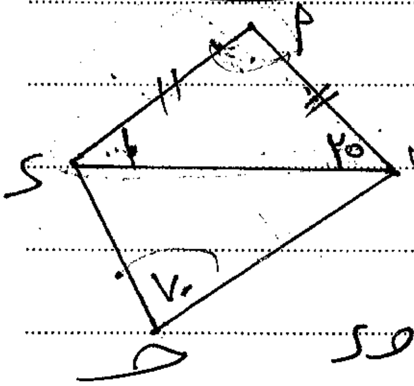
متكاملتان في شكل رباعي كان هذا

الشكل رباعي دائري

نتيجة

إذا وجدت زاوية خارجة عن شكل رباعي تساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة كان الشكل رباعي دائري

مثال



أب = أد

اثبت أن الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

الحل

∵ أب = أد

∴ ق(١) = ٣٥°

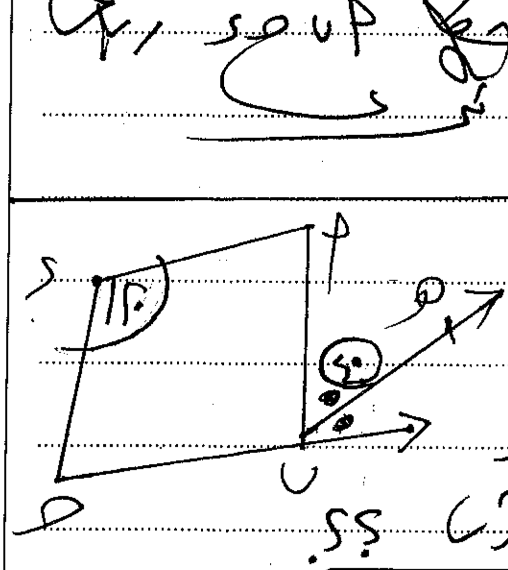
∴ ق(أ) = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠°

∴ ق(أ) + ق(جـ) = ١٨٠°

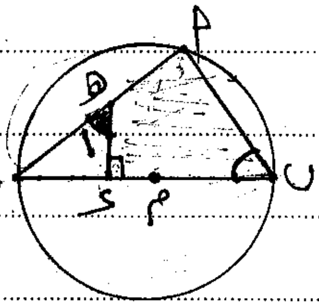
وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

هل الشكل أ ب جـ د رباعي دائري ؟؟



مثال (١)



في الشكل ب جـ قطر ، هـ د ⊥ ب جـ

برهن أن ① الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

② ق(∠أ هـ د) = ½ ق(أ جـ)

الحل

① ∵ ب جـ قطر

∴ ق(أ) = ٩٠°

∴ ق(أ) + ق(د) = ١٨٠

وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

② ← ومنه هو المطلوب

ق(١) = ق(ب) ← I

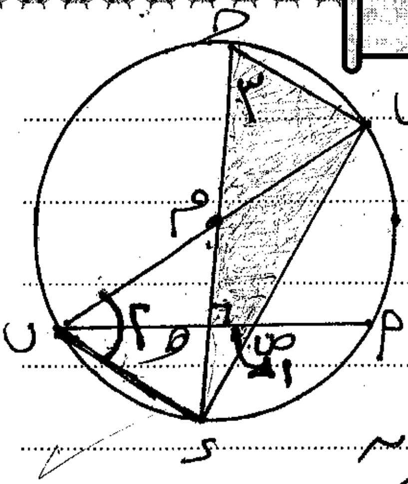
زاوية خارجة

∵ ق(ب) = ½ ق(أ جـ) ← II

من ① ، ②

∴ ق(١) = ½ ق(أ جـ)

مثال ④



في الشكل
$\overline{دص}$ قطر
$\perp \overline{أب}$

اثبت أن

① الشكل س ص هـ ص رباعي دائري

② ق(د ص ب) = ق(د ب س)

الحل

∵ $\overline{دص}$ قطر

∴ ق(د س ص) = ٩٠°
نتيجة

∴ ق(ص س ص) + ق(ص هـ ص) = ١٨٠°
وهما متقابلتان

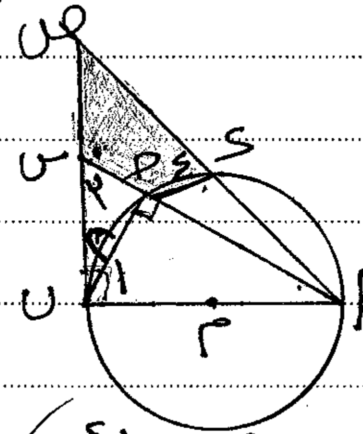
∴ الشكل س ص هـ ص رباعي دائري ← أولاً

وهو متواصل
ق(١) الخارجة = ق(٣)
نتيجة

∵ ق(٢) = ق(٣) محيطيتان

∴ ق(١) = ق(٢)
هو المطلوب ثانياً

مثال ⑤



في الشكل
$\overline{أب}$ قطر
$\overleftrightarrow{ب ص}$ مماس

برهن أن
س ص د هـ رباعي دائري

الحل

∵ $\overline{أب}$ قطر

∴ ق(أ هـ ب) = ٩٠°

∵ $\overline{أب}$ (قطر) $\perp$ $\overline{ب ص}$ (مماس)

∴ ق(أ ب ص) = ٩٠°

∵ ق(١) + ق(٢) = ٩٠°

∵ ق(هـ) = ٩٠°

∴ ق(٢) + ق(٣) = ٩٠°

∴ $\boxed{ق(١) = ق(٣)}$ ← I

∵ الشكل أ د هـ ب رباعي دائري

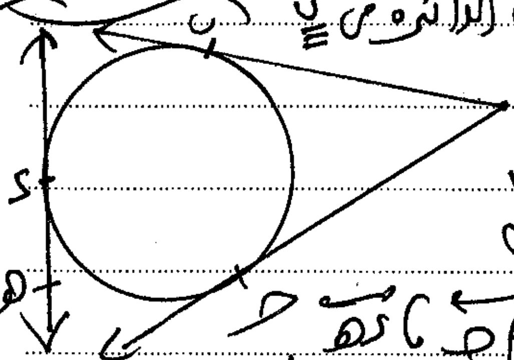
∴ ق(٤) الخارجة = ق(١) نتيجة ← II

من I ، II ∴ ق(٣) = ق(٤)

وهي خارجة ∴ الشكل رباعي دائري

التماس والزاوية المماسية

$\overleftrightarrow{أب}$ يمس الدائرة م في ب



في الشكل

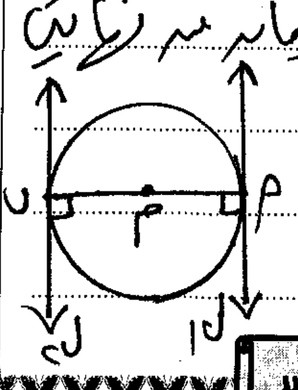
$\overleftrightarrow{أب}$ ، أ ج ، $\overleftrightarrow{د هـ}$ تسمى مماسات للدائرة

ملاحظات هامة

1. عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو ٤
2. عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج ٣
3. عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل ١
4. عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين هو ٢

تنبيه

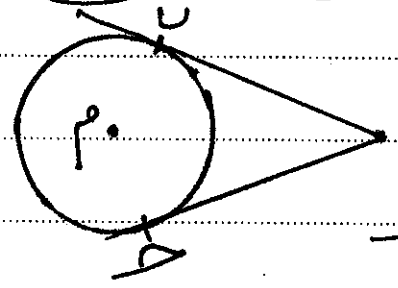
المماسات المرسومة من نهايتي قطر في دائرة متوازيان



ل١ // ل٢

نظرية

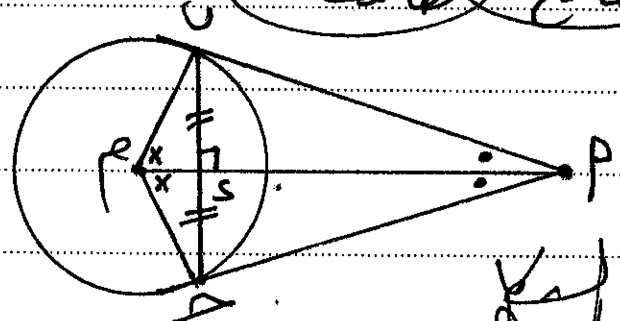
القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول



في الشكل

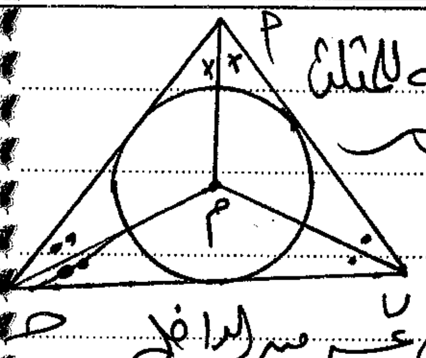
أب = أ ج

نتائج هامة



في الشكل

1. $\overleftrightarrow{م أ}$ محور تماثل الوتر ب ج
2. أم ينصف زاويتي أ ، م



الدائرة الداخلة للمثلث

هي الدائرة التي تمس أضلاعه من الداخل

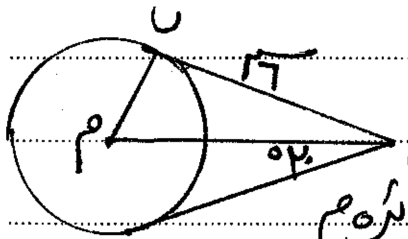
ملاحظات هامة جدا

مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه.

تذكر أن

مركز الدائرة الخارجة للمثلث هي نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

١

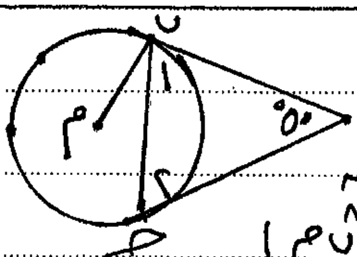


في الشكل: أب ، أجـ مماسان للدائرة م
أوجد ق(∠أ م ب) ، طول أجـ

الحل

∵ أب ، أجـ مماسان
∴ أب = أجـ = ٦ سم نظرية
∵ أم ينصف ∠أ نتيجة
∴ ق(∠ب أ م) = ٣٠°
∵ م ب (نق) ⊥ أب (مماس)
∴ ق(∠ب) = ٩٠°
∴ ق(∠أ م ب) = ٩٠ − ٣٠ = $\boxed{٦٠}$

٢

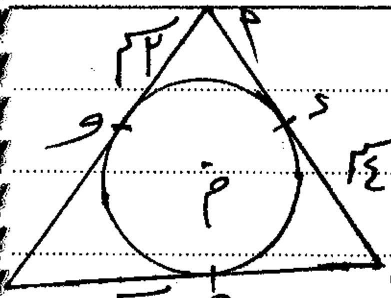


في الشكل: أب ، أجـ مماسان
أوجد ق(∠جـ ب م)

الحل

أب ، أجـ مماسان معطى
∵ أب = أجـ نظرية
∴ ق(∠١) = ق(∠٢)
∵ ق(∠أ) = ٥٠°
∴ ق(∠١) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = $\boxed{٦٥}$
∵ م ب ⊥ أب ⟸ ق(∠م ب أ) = ٩٠°
∴ ق(∠م ب جـ) = ٩٠ − ٦٥ = $\boxed{٢٥}$

٣



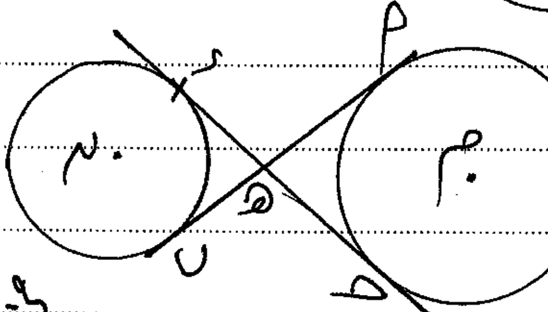
في الشكل: م دائرة داخلة Δ أب جـ
أوجد محيط Δ أب جـ

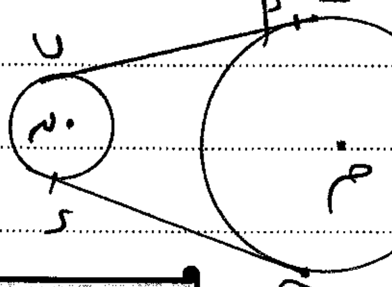
الحل

* أد = أو = ٣ سم
* ب د = ب هـ = ٤ سم
* جـ و = جـ هـ = ٦ سم

∴ محيط Δ أب جـ
= ٧ + ١٠ + ٩ = ٢٦ سم

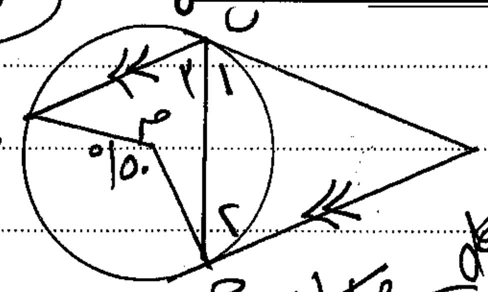
٤





هندسة

٥



في الشكل أب ، أجـ مماسان

أجـ // ب د أثبت أن

ب جـ ينصف ∠أ ب د ؟

ثم أوجد ق(∠أ)

الحل

∵ أب = أجـ   نظرية

مماسان

∴ ق(∠١) = ق(∠٢) ← I

∵ أجـ // ب د   معطى

∴ ق(∠٣) = ق(∠٢) بالتبادل ← II

من I ، II

∴ ق(∠١) = ق(∠٣)

∴ ب جـ ينصف ∠أ ب د

أولاً

∵ ق(∠٣) = ½ ق(∠م) المركزية

ق(∠٣) = ٧٥°

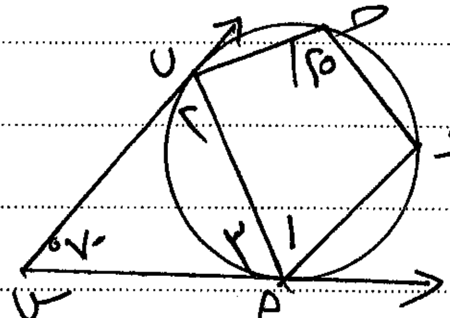
∴ ق(∠١) = ٧٥°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٧٥ + ٧٥)

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ١٥٠

$\boxed{\text{ق(∠أ)} = ٣٠°}$

٦



في الشكل المقابل

س أ ، س ب مماسان أثبت أن

١) أب ينصف ∠د أ س

٢) أد // ب س

الحل

∵ الشكل أ د جـ ب رباعي دائري

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − ١٢٥ = ٥٥°

∵ س أ ، س ب مماسان

∴ س أ = س ب   نظرية

∴ ق(∠٢) = ق(∠٣)

∵ ق(∠س) = ٧٠°

∴ ق(∠٢) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°

∴ ق(∠١) = ق(∠٢)

∴ أب ينصف ∠د أ س

أولاً

∵ ق(∠١) = ق(∠٢) = ٥٥°

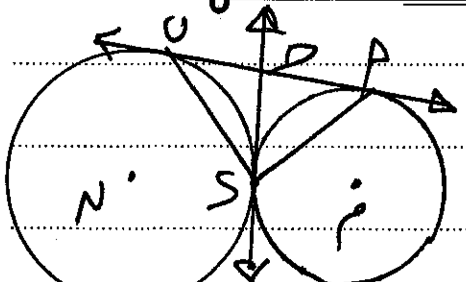
وهما في وضع تبادل

∴ أد // ب س   ثانياً

سبحان الله وبحمده

سبحان الله العظيم

(٧)



في الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج

أب ، جـ د مماسان مشتركان

اثبت أن

(١) جـ منتصف أب

(٢) أد ⊥ د ب

الحل

∵ جـ أ ، جـ د مماسان لـ م

∴ جـ أ = جـ د ← نظرية (١)

مثلها

جـ د = جـ ب ← نظرية (٢)

من (١) ، (٢)

∴ جـ أ = جـ ب

∴ جـ منتصف أب ← أولاً

∵ جـ د = جـ أ = جـ ب

∴ جـ د = ½ أب

جـ د متوسط

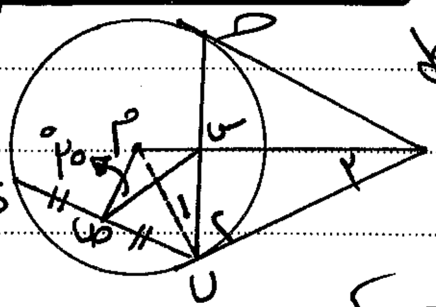
∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠°

← ثانياً

عكس

نظرية ٢ ج

(٨)



في الشكل

أب ، أجـ مماسان

ب جـ = جـ د ، ق(∠س جـ م) = ٢٥° اثبت

(١) الشكل م س ب جـ رباعي دائري

(٢) ق(أ) اوجدها

الحل

∵ أب ، أجـ مماسان

∴ م أ ⊥ ب جـ نتيجة

∴ ق(∠م س ب) = ٩٠°

∵ ب جـ = جـ د

∴ م جـ ⊥ ب د نتيجة ١ منتصف

∴ ق(∠م جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠م س ب) + ق(∠م جـ ب) = ١٨٠°

وهما متقابلتان

∴ الشكل م س ب جـ رباعي دائري

ومرسوم على أحد

ق(∠١) = ق(∠س جـ م) = ٢٥°

∵ م ب ⊥ أب (مماس)

∴ ق(∠٢) = ٩٠ − ٢٥ = ٥٥°

∵ ق(∠س) = ٩٠°

∴ ق(∠٣) = ٩٠ − ٥٥ = ٣٥°

∴ ق(∠أ) = ٢ × ٣٥ = ٧٠°

يتبع

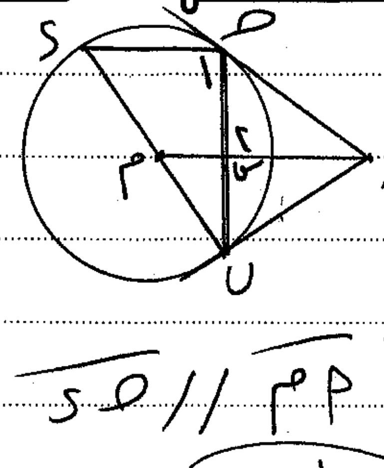
(٩) في الشكل

أ ب ، أ جـ

مماسان

ب د قطر

أثبت أن أ م // جـ د



الحل

العمل

نصل ب جـ

∵ ب د قطر معطى

∴ ق(∠ب جـ د) = ٩٠°

نتيجة

∵ أ ب ، أ جـ مماسان

∴ أ م ⊥ ب جـ نظرية

∴ ق(∠أ س جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠١) = ق(∠٢) = ٩٠°

وهما في وضع تبادل

∴ أ م // جـ د

روووعه

(١٠) أ ب قطر في دائرة م طوله ١٠ سم

جـ د للدائرة م ، رسم مماس

عند جـ فقطع المماسين لها

عند أ ، ب في س ، ص حيث

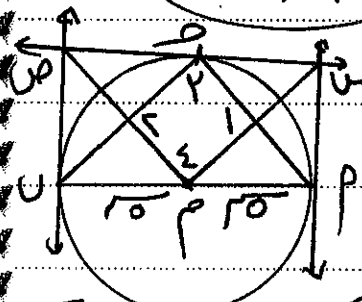
س ص = ١٢ سم أثبت أن

(١) س م ⊥ ص م

ثم أوجد مساحة الشكل

أ س ص ب

الحل



م أ ⊥ أ س

نرسم أ س مماس

م ب ⊥ ب ص

نرسم ب ص مماس ∴ أ س // ب ص

∵ س م ⊥ م ص شكل

يكمل

م جـ ⊥ س ص (وتر المماس)

∴ ق(∠١) = ق(∠٢) = ٩٠°

∵ أ ب قطر معطى

∴ ق(∠٣) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠٤) = ٩٠°

∴ س م ⊥ م ص

أكمل

∵ أ س = س جـ

، ص جـ = ص ب نظرية

∴ أ س + ب ص = س جـ + جـ ص

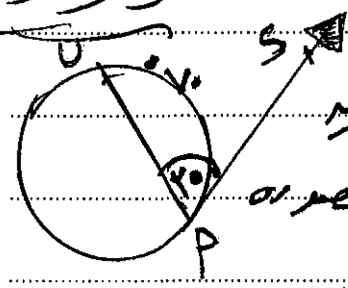
∴ أ س + ب ص = ١٢ سم

مساحة شبه المنحرف أ س ص ب

= ½ (أ س + ب ص) × أ ب

= ½ × ١٢ × ١٠ = ٦٠ سم²

الزاوية المماسية

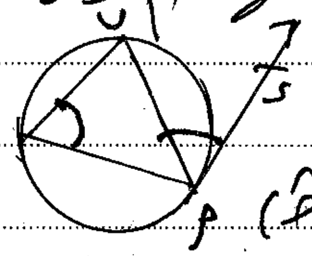


الزاوية المماسية
هي زاوية محصورة بين مماس ووتر
وقياسها = ½ ق (القوس)

★ ق$(\hat{أ})$ = ½ ق (أب⌒)

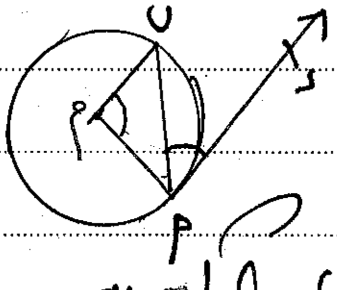
نظرية

قياس الزاوية المماسية تساوي قياس المحيطية المشتركة معها في القوس



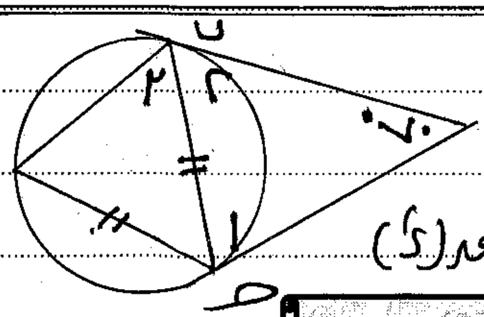
في الشكل: ق(∠د أ ب) = ق$(\hat{ح})$

نتيجة



ق(∠د أ ب) = ½ ق$(\hat{م})$ المركزية

مثال ①



في الشكل

أوجد ق$(\hat{د})$

حـ/ اثبت أن $\overline{أهـ}$ // $\overline{بد}$

الحل

∵ م أ = م ب (طولا مماسين)

∴ ق$(\hat{1})$ = ق$(\hat{2})$

= $\frac{180 - 70}{2}$ = 55

∵ ق$(\hat{1})$ المماسية = ق$(\hat{د})$

= 55°

∵ هـ ب = هـ د

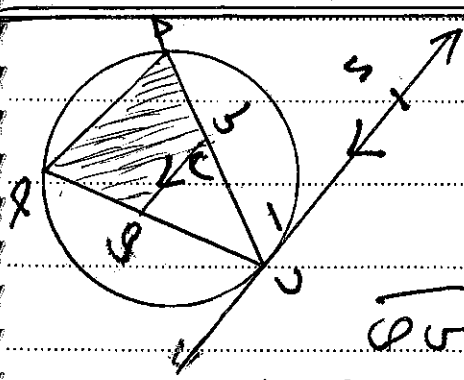
∴ ق$(\hat{د})$ = ق$(\hat{3})$ = 55°

∴ ق$(\hat{1})$ = ق$(\hat{3})$ = 55°

وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{أهـ}$ // $\overline{بد}$

مثال ②



في الشكل
$\overleftrightarrow{بد}$ مماس
$\overline{دب}$ // $\overline{سص}$

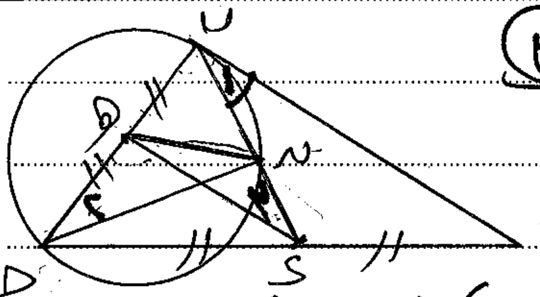
اثبت أن الشكل أ س ص حـ
رباعي دائري

الحل

∵ كن ⃡ // سص معطى
∴ ق(١) = ق(٢) بالتبادل
→ I
∵ كن ⃡ مماس
∴ ق(١) المماسية = ق(أ) المحيطية
تطرحهما → II
من I ، II
∴ ق(٢) = ق(أ)
وهما خارجة
∴ الشكل أ س ص ص رباعي دائري

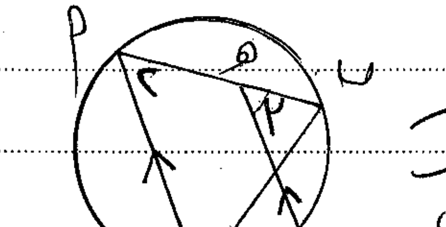
∵ أد = دج معطى
ب هـ = هـ ج
∴ دهـ // أج
→ أولاً
وضد التوازي
ق(١) = ق(٢) بالتبادل → I
∵ أج مماس
∴ ق(١) المماسية = ق(٣) المحيطية → II
من I ، II
∴ ق(٢) = ق(٣)
وهما مرسومتان على ب هـ
∴ الشكل ب د ج هـ رباعي دائري

مثال ٢



في الشكل أج ⃡ مماس
أد = دج ،
ب هـ = هـ ج برهن أن
١ أج // دهـ
٢ اثبت أن الشكل ب د ج هـ رباعي دائري
الحل

مثال ٤



دهـ // أج
دص ⃡ مماس
برهن أن الشكل ب هـ ج د رباعي دائري
الحل

∵ هـ ى // أ ب مستعرض

∴ ق(٣) = ق(٤) بالتبادل ← I

∵ ى ك مماس

∴ ق(١) المماسية = ق(٢) تناظر ← II

من I ، II

∴ ق(١) = ق(٢)

وهما مرسومتان على ب ى

∴ الشكل ب هـ ح ى رباعي دائري

للدائرة الصغرى

الحل

∵ أ س مماس للكبرى

∴ ق(١) المماسية = ق(٢)

∵ ب ى // ح هـ

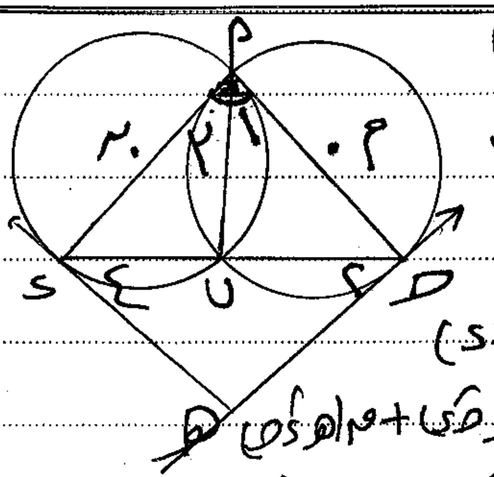
∴ ق(٢) = ق(٤)

∴ ق(١) = ق(٤)

∴ أ س مماس للصغرى

عكس النظرية

مثال ٢



في الشكل اثبت

ق(ح أ ى) = ق(هـ ح ى) + ق(هـ ى ح)

ثم اثبت ان الشكل أ ح هـ ى رباعي دائري

الحل

∵ ح هـ مماس للأولى

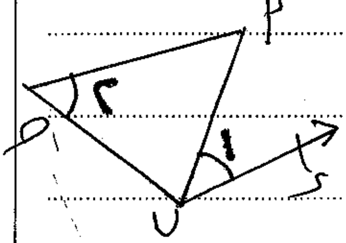
∴ ق(٤) = ق(١) ← I

بالمثل هـ ى مماس للثانية

∴ ق(٤) = ق(٢) ← II

بالجمع

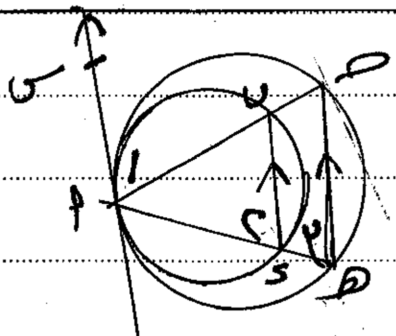
عكس النظرية



في الشكل

إذا كان ق(١) = ق(٢)

فإن ب ى مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ح



في الشكل

أ س مماس للدائرة الكبرى

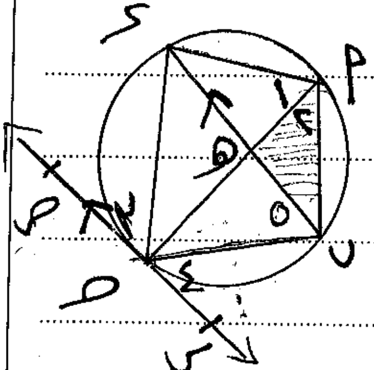
ب ى // ح هـ اثبت ان أ س مماس

التوافيق

ق(∠ ص م ك) =
ق(∠٢) + ق(∠٤) ← أولاً
∵ ق(∠٢) + ق(∠٤) + ق(∠هـ)
= ١٨٠°
∴ ق(∠ ص م ك) + ق(∠هـ) = ١٨٠°
وهما متقابلتان
∴ الشكل أ ص هـ د رباعي
دائري

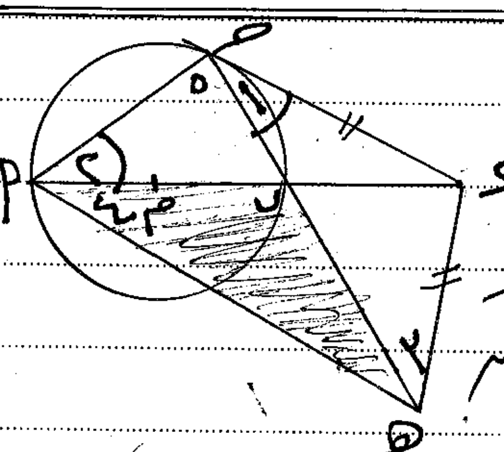
∵ ق(∠٥) = ق(∠١)
ق(∠١) = ق(∠٢)
∴ ق(∠٥) = ق(∠٢)
∴ ب جـ مماس للدائرة المارة
برؤوس △ أ ب هـ

مثال ④
في الشكل
س ص مماس
س ص // ب د
برهن أن
① أ جـ ينصف ∠ ب أ د
② ب د مماس للدائرة المارة
برؤوس △ أ ب هـ



الحل
∵ س ص مماس
∴ ق(∠٤) = ق(∠أ) محيطية
∵ س ص // ب د مستقيم
∴ ق(∠٤) = ق(∠٥) بالتبادل
ق(∠١) = ق(∠٥) محيطيتان
∴ ق(∠١) = ق(∠٢) ← ثانياً

مثال ⑤
أب قطر
دب مماس د
دهـ = دب
برهن أن
①
الشكل أ ب د هـ رباعي دائري
② أهـ قطر للدائرة المارة برؤوس △



الحل
∵ دب مماس ∴ ق(∠١) = ق(∠٢)
∵ دب = دهـ ∴ ق(∠٣) = ق(∠١)
∴ ق(∠٢) = ق(∠٣) وهما مرسومتان
على دهـ ∴ الشكل أ ب د هـ رباعي دائري
∵ أب قطر ∴ ق(∠٥) = ٩٠°
∴ هـ أ قطر للدائرة الجديدة
∴ ق(∠١) = ق(∠٤) لأن الشكل
أ ب د هـ رباعي دائري
∴ ق(∠٤) = ق(∠٢) ∴ د هـ مماس للدائرة
المارة برؤوس △ أ ب هـ